



# Etude théorique de l'évolution du comportement de matériaux viscoplastiques endommagés

Laurent Briottet

## ► To cite this version:

Laurent Briottet. Etude théorique de l'évolution du comportement de matériaux viscoplastiques endommagés. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 1994. Français. NNT: . tel-01163655

**HAL Id: tel-01163655**

**<https://hal-emse.ccsd.cnrs.fr/tel-01163655>**

Submitted on 15 Jun 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE  
DES MINES DE SAINT-ETIENNE**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE  
DES MINES DE PARIS**

N° D'ORDRE 115 TD

## **THESE**

présentée par

**Laurent BRIOTTET**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR**

**DE L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE SAINT-ETIENNE**

**ET DE**

**L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS**

**(Spécialité : Science et Génie des Matériaux)**

**ETUDE THEORIQUE DE L'EVOLUTION DU COMPORTEMENT  
DE MATERIAUX VISCOPLASTIQUES ENDOMMAGES**

soutenue à Saint-Etienne le 21 octobre 1994

### *COMPOSITION DU JURY*

**Monsieur J.B. LEBLOND**

**Monsieur A. MOLINARI**

**Monsieur M. PREDELEANU**

**Monsieur G. CAILLETAUD**

**Monsieur F. MONTHEILLET**

**Monsieur H. KLÖCKER**

**Monsieur G. DAMAMME**

**Président**

**Rapporteur**

**Rapporteur**

**Examineur**

**Examineur**

**Examineur**

**Invité**



**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE  
DES MINES DE SAINT-ETIENNE**

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE  
DES MINES DE PARIS**

N° D'ORDRE 115 TD

## **THESE**

présentée par

**Laurent BRIOTTET**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR**

DE L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE SAINT-ETIENNE

ET DE

L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS

(Spécialité : Science et Génie des Matériaux)

### **ETUDE THEORIQUE DE L'EVOLUTION DU COMPORTEMENT DE MATERIAUX VISCOPLASTIQUES ENDOMMAGES**

soutenue à Saint-Etienne le 21 octobre 1994

#### *COMPOSITION DU JURY*

**Monsieur J.B. LEBLOND**

**Monsieur A. MOLINARI**

**Monsieur M. PREDELEANU**

**Monsieur G. CAILLETAUD**

**Monsieur F. MONTHEILLET**

**Monsieur H. KLÖCKER**

**Monsieur G. DAMAMME**

**Président**

**Rapporteur**

**Rapporteur**

**Examineur**

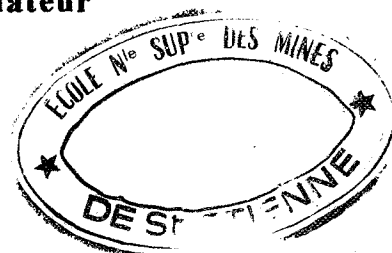
**Examineur**

**Examineur**

**Invité**



2 ex.





100  
100  
100

100  
100  
100  
100  
100

100  
100  
100  
100  
100  
100  
100  
100

100

*Ce travail a été financé par le CEA/DAM Vaujours-Moronvilliers dans le cadre d'un Contrat de Formation à la Recherche. A ce titre, je remercie plus particulièrement Monsieur R. DORMEVAL, Chef de Section.*

*Je remercie vivement Monsieur J.B. LEBLOND, Professeur à l'université de Paris VI, d'avoir accepté d'être président du jury, ainsi que Messieurs A. MOLINARI, Professeur à l'université de Metz, et M. PREDELEANU, Directeur de Recherche à l'ENS Cachan, rapporteurs et Monsieur G. CAILLETAUD, Professeur à l'ENSMF, examinateur de ce manuscrit.*

*Cette thèse a eu la particularité d'être encadrée par 3 personnes : Monsieur G. DAMAMME, Ingénieur en chef des Mines au CEA/DAM de Bruyères le Châtel, Monsieur F. MONTHEILLET, Directeur de Recherche au CNRS, et Monsieur H. KLÖCKER, chargé de Recherche à l'ENSMSE. Les nombreuses discussions acharnées avec chacun d'eux ont permis à ce manuscrit d'être ce qu'il est devenu. Je les remercie tout particulièrement pour le temps qu'ils ont consacré à ce travail. Ils ont su développer en moi le goût de la recherche ainsi qu'un grand intérêt pour la mécanique.*

*Pour finir, un grand merci à tous les membres du département pour leur aide, leur soutien et leur bonne humeur.*



# **SOMMAIRE**



## SOMMAIRE

<b>Introduction générale</b> .....	<b>1</b>
------------------------------------	----------

<b>CHAPITRE I : Croissance d'une cavité ellipsoïdale de révolution dans une matrice viscoplastique linéaire compressible</b> .....	<b>5</b>
--	----------

I. Introduction - Synthèse bibliographique .....	6
I.1. Matrice élastique .....	
I.2. Matrice viscoplastique linéaire .....	
II. Présentation du modèle .....	13
II.1. Géométrie et chargement .....	
II.2. Comportement du matériau .....	
II.3. La méthode des trois potentiels .....	
II.4. Importance du choix des paramètres de chargement et de la déformation de référence .....	
III. Discussion des résultats .....	21
III.1. Evolution du rayon moyen .....	
III.2. Evolution du volume .....	
III.3. Evolution de l'excentricité .....	
III.4. Triaxialité critique .....	
III.5. Cartes d'isovaleurs de contrainte moyenne et de vitesse de déformation équivalente .....	
IV. Interprétation des modes de vitesse .....	28
IV.1. Mode 1 .....	
IV.2. Mode 2 .....	
IV.3. Mode 3 .....	
IV.4. Champ total .....	
IV.5. Comparaison avec la solution proposée par LEE et MEAR pour une matrice incompressible .....	
V. Conclusion .....	33

<b>CHAPITRE II : Croissance d'une cavité ellipsoïdale de révolution dans une matrice non linéaire compressible</b> .....	<b>34</b>
--	-----------

I. Introduction - Synthèse bibliographique .....	35
I.1. Lois de comportement étudiées .....	
I.2. Cavité isolée dans une matrice incompressible infinie .....	
II. Méthode de calcul .....	45
II.1. Présentation du problème .....	
II.2. Principe variationnel utilisé .....	

II.3. Formes des champs de vitesse adoptées	
III. Analyse des résultats	50
III.1. Comparaison des solutions obtenues	
III.2. Comportement pseudoplastique compressible	
III.3. Comportement linéaire avec seuil compressible	
III.4. Comparaison des deux comportements étudiés	
IV. Conclusion	62

### CHAPITRE III : Comportement d'un matériau viscoplastique linéaire endommagé

I. Introduction	65
II. Synthèse bibliographique	66
II.1. Représentation d'un matériau hétérogène	
II.2. Définition de la cohérence	
II.3. Encadrements du comportement	
II.4. Estimations du comportement	
II.5. Exemple : matrice isotrope incompressible contenant des cavités sphériques	
III. Méthode de calcul	83
III.1. Construction d'un potentiel axisymétrique compressible	
III.2. La méthode différentielle dans le cas axisymétrique	
IV. Analyse des résultats	91
IV.1. Evolution des modules en fonction de $\lambda$ et $f$	
IV.2. Potentiel axisymétrique	
IV.3. Mesure particulière de l'anisotropie : comportement isotrope "le plus proche"	
IV.4. Croissance d'une cavité initialement sphérique dans un matériau axisymétrique compressible linéaire	
IV.5. Evolution de l'endommagement	
V. Conclusion	101

### CHAPITRE IV : Comportement d'un matériau viscoplastique non linéaire endommagé

I. Introduction	103
II. Synthèse bibliographique	104
II.1. Méthodes "autocoherentes" à deux ou trois phases	
II.2. Méthodes de perturbation du potentiel des contraintes	
II.3. Méthode de GURSON et ses extensions	
II.4. Méthodes de comparaison avec un matériau linéaire de référence	



III. Etude du comportement effectif d'un matériau pseudoplastique endommagé isotrope .....	114
III.1. Application de la méthode de PONTE CASTAÑEDA à la méthode différentielle	
III.2. Discussion des résultats	
IV. Etude du comportement effectif d'un matériau linéaire avec seuil endommagé isotrope .....	119
IV.1. Application de la méthode de PONTE CASTAÑEDA à la méthode différentielle	
IV.2. Discussion des résultats	
V. Potentiel axisymétrique d'une matrice pseudoplastique endommagée .....	123
V.1. Principe de la méthode	
V.2. Discussion des résultats	
VI. Conclusion .....	127
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>129</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>133</b>
<b>ANNEXE I : Champs de contrainte et de vitesse de déformation autour d'une cavité ellipsoïdale de révolution dans une matrice viscoplastique linéaire : solution exacte .....</b>	<b>137</b>
<b>ANNEXE II : Polynômes et fonctions de Legendre associées .....</b>	<b>143</b>
<b>ANNEXE III : Détermination de la vitesse de déformation de transition quasistatique - dynamique pour le cuivre CuC1 .....</b>	<b>144</b>
<b>ANNEXE IV : Le comportement axisymétrique .....</b>	<b>147</b>
<b>ANNEXE V : Tenseur d'Eshelby pour une matrice axisymétrique .....</b>	<b>150</b>
<b>ANNEXE VI : Liste des notations utilisées .....</b>	<b>151</b>



# **INTRODUCTION GENERALE**

1914

1915

1916

1917

1918

1919

1920

1921

1922

1923

1924

1925

1926

1927

1928

1929

1930

1931

1932

1933

1934

1935

1936

1937

1938

1939

1940

1941

1942

1943

1944

## Introduction générale

Au cours de la déformation d'un métal, dans les procédés de mise en forme par exemple, il est important de connaître son aptitude à se déformer sans se rompre. Cette capacité de déformation avant la rupture dépend des prédéformations que le matériau a subies. Plus celles-ci sont élevées, plus la ductilité du matériau diminue. Ce phénomène se nomme l'endommagement. L'étude de l'endommagement connaît un développement important du fait de son utilité dans de nombreux domaines : mise en forme des matériaux à petites et grandes vitesses de déformation (forgeage, laminage, mise en forme par explosif, ...), étude de la perforation (projectiles et blindages) dans le domaine militaire. De façon générale, les matériaux métalliques atteignent la rupture suivant deux types principaux de mécanismes : la rupture fragile, par propagation de fissures, se caractérisant par la présence de plans de clivage sur le faciès de rupture ; la rupture ductile présentant un faciès composé de nombreuses cupules, signe d'un endommagement par micro-porosité ou micro-cavités. Le but de ce mémoire est de s'intéresser plus précisément aux phénomènes concernant l'endommagement ductile.

L'endommagement d'un matériau ductile se caractérise classiquement (bien qu'arbitrairement) par trois étapes pouvant survenir simultanément : germination, croissance puis coalescence des cavités. Le métal ductile endommagé se présente donc sous la forme d'un composite biphasé constitué de la matrice initiale et de cavités. Décrivons brièvement ces trois étapes.

Le premier problème est de connaître puis de comprendre les causes gouvernant l'apparition de l'endommagement. De nombreuses expériences ont été effectuées pour analyser les éprouvettes à la suite d'essais d'endommagement. En 1945, MALCOR montre le rôle primordial des inclusions lors de l'amorçage de la rupture. GURLAND et PLATEAU [1963] observent, sur des faciès de rupture d'éprouvettes en acier, d'alliage fer-nickel et de duralumin de nombreuses cupules contenant souvent une inclusion ou un précipité. De même, COX et LOW [1974] ont mis en évidence la présence de

cavités lors de l'amorçage de l'endommagement ductile. Ces auteurs ont étudié différents aciers et ont observé que la germination des micro-cavités a lieu de préférence autour des inclusions. Tous ces résultats montrent que les inclusions sont à l'origine de la formation de cavités. *Il est important de noter que cette hypothèse permet même d'expliquer l'amorçage de l'endommagement dans les métaux de grande pureté.* Ainsi MONTHEILLET et MOUSSY [1986] montrent que dans un matériau de haute pureté (99,999 %) la fraction volumique d'inclusions fournit un nombre de sites d'amorçage de l'endommagement suffisant pour expliquer les observations expérimentales. Ces auteurs donnent l'exemple d'un cuivre contenant du plomb en très faible teneur. Ils calculent, à l'aide d'un raisonnement simple, l'espacement moyen entre inclusions de plomb dans un tel alliage. Le résultat obtenu correspond à l'espacement moyen entre cupules observé sur les surfaces de rupture ductile. Sans en être une preuve, ce simple raisonnement montre que *la présence d'inclusions suffit à elle seule à expliquer la nucléation de micro-cavités, même dans des matériaux de haute pureté.*

Lors de la croissance, la plasticité du matériau permet l'expansion des cavités créées au cours de l'étape précédente. La présence de cavités dans le matériau en cours d'endommagement rend le composite matrice-cavités compressible. En fonction du chargement appliqué à l'infini, le volume des cavités évolue, ainsi donc que celui du matériau global. Il est alors intéressant d'étudier les interactions entre le comportement du matériau endommagé et la croissance (en portant de l'intérêt tant sur le volume que sur la forme) des cavités.

Au dernier stade de l'endommagement les cavités interagissent (coalescent) pour donner naissance à une fissure macroscopique. Cette dernière précède de peu la rupture du matériau. L'apparition de la coalescence est conditionnée par la fraction volumique de cavités présentes ainsi que par leur disposition relative. Au cours de cette étape, une localisation de la déformation est observée. Tout le problème consiste à déterminer à quel "instant" cette bifurcation apparaît : c'est à dire le passage d'une déformation homogène dans l'ensemble du matériau à une déformation localisée à une zone restreinte bien précise.

Dans ce mémoire, nous considérerons ces trois étapes comme entièrement découplées. Nous nous intéresserons uniquement à la phase de croissance des cavités. Plus précisément, notre but est d'appréhender à la fois

l'influence de la compressibilité de la matrice sur la croissance des cavités et celle des cavités sur le comportement endommagé. Les interactions directes entre cavités sont négligées, leur présence est seulement prise en compte en considérant le matériau macroscopique compressible. La fraction volumique considérée reste donc toujours faible.

Pour observer l'effet du chargement, et en particulier de la triaxialité des contraintes, sur les différentes grandeurs observées, deux taux de triaxialité seront principalement imposés tout au long du manuscrit : d'une part un taux de triaxialité de  $1/3$  correspondant à l'essai de traction uniaxiale d'une éprouvette lisse ; d'autre part un taux beaucoup plus élevé (en l'occurrence 7) dont l'ordre de grandeur correspond à l'état de contrainte lors d'un essai d'impact de plaques. En effet, lorsque les dimensions radiales de la plaque-cible sont beaucoup plus grande (au moins 5 fois) que son épaisseur, on peut supposer que lors de l'essai à grande vitesse, il n'y a pas de retrait dans le sens radial : la plaque est dans un état de *déformation uniaxiale*. Cet état entraîne une forte triaxialité des contraintes dans le matériau, pouvant varier de 1 à 10 (DUMONT [1991], ZUKAS et al. [1982]).

Ce manuscrit se décompose en quatre chapitres. Les deux premiers traitent de la détermination du champ de contrainte et de vitesse de déformation autour d'une cavité isolée dans une matrice viscoplastique. Les deux suivants étudient le comportement effectif d'une matrice endommagée par la présence de cavités ellipsoïdales. Chaque chapitre débute par une synthèse bibliographique des travaux concernant le problème mécanique étudié.

Le premier chapitre traite d'une cavité ellipsoïdale de révolution isolée dans une matrice *viscoplastique linéaire compressible*. Les champs de contrainte et de vitesse de déformation exacts autour de la cavité sont calculés analytiquement. Ceci permet de discuter la croissance de la cavité en fonction du caractère compressible de la matrice.

Dans le deuxième chapitre, l'étude de la croissance d'une cavité isolée dans une matrice viscoplastique *non-linéaire compressible* est abordée. Nous nous appuyons sur les résultats du premier chapitre, ainsi que sur l'introduction de contrainte et vitesse de déformation équivalentes tenant compte de la compressibilité de la matrice, pour appliquer un principe variationnel. Deux types de comportement sont pris en compte, correspondant en incompressible à des matrices pseudoplastique  $\bar{\sigma}_{vm} = k \dot{\bar{\epsilon}}_{vm}^m$  et linéaire avec seuil  $\bar{\sigma}_{vm} = \sigma_0 + \beta \dot{\bar{\epsilon}}_{vm}$  ( $\bar{\sigma}_{vm}$  et  $\dot{\bar{\epsilon}}_{vm}$  étant respectivement les contrainte et vitesse de déformation



équivalente de von Mises). Ce dernier comportement est observé dans le domaine des grandes vitesses de déformation. En 1960, MASON interprète cette forme de comportement par un mécanisme de frottement visqueux opposant, à grande vitesse de déformation, la principale résistance au mouvement des dislocations. La comparaison des résultats obtenus pour les deux comportements montrera l'effet de la loi linéaire avec seuil sur la croissance de l'endommagement.

Ces deux premières parties nous ont permis de connaître l'influence du comportement de la matrice endommagée sur l'évolution géométrique d'une cavité isolée dans une matrice infinie au cours du chargement. L'endommagement du matériau est alors supposé connu et constant. A l'inverse, les renseignements obtenus, ainsi que l'utilisation de méthodes de moyenne, vont maintenant permettre de calculer l'influence de la présence d'une fraction volumique de cavités sur le comportement global.

Ce problème est abordé dans le troisième chapitre où des cavités ellipsoïdales de révolution (toutes de même forme) sont présentes dans une matrice *viscoplastique linéaire*. Le comportement macroscopique du composite ainsi obtenu est alors estimé. En particulier, lorsque les cavités sont de forme ellipsoïdale de révolution alignées suivant un même axe, le comportement mécanique de la matrice linéaire initialement *isotrope incompressible* devient *axisymétrique compressible*. L'apparition de cette anisotropie est étudiée en détail pour déterminer si son influence est négligeable ou non à faible porosité ( $f < 0,05$ ). Cette analyse permet donc d'étudier l'apparition d'une anisotropie d'origine morphologique (liée à la forme des cavités). En revanche, l'existence d'une anisotropie d'origine topologique (liée à la distribution des cavités) n'est pas abordée.

Les résultats précédents peuvent être utilisés pour déterminer le comportement effectif d'une matrice de comportement *viscoplastique non linéaire* contenant une population donnée de cavités. L'approche variationnelle proposée par PONTE CASTAÑEDA [1991] est appliquée aux deux comportements étudiés. Les résultats sont exposés dans un quatrième chapitre qui compare les résultats obtenus aux modèles existants.

## **PREMIER CHAPITRE**

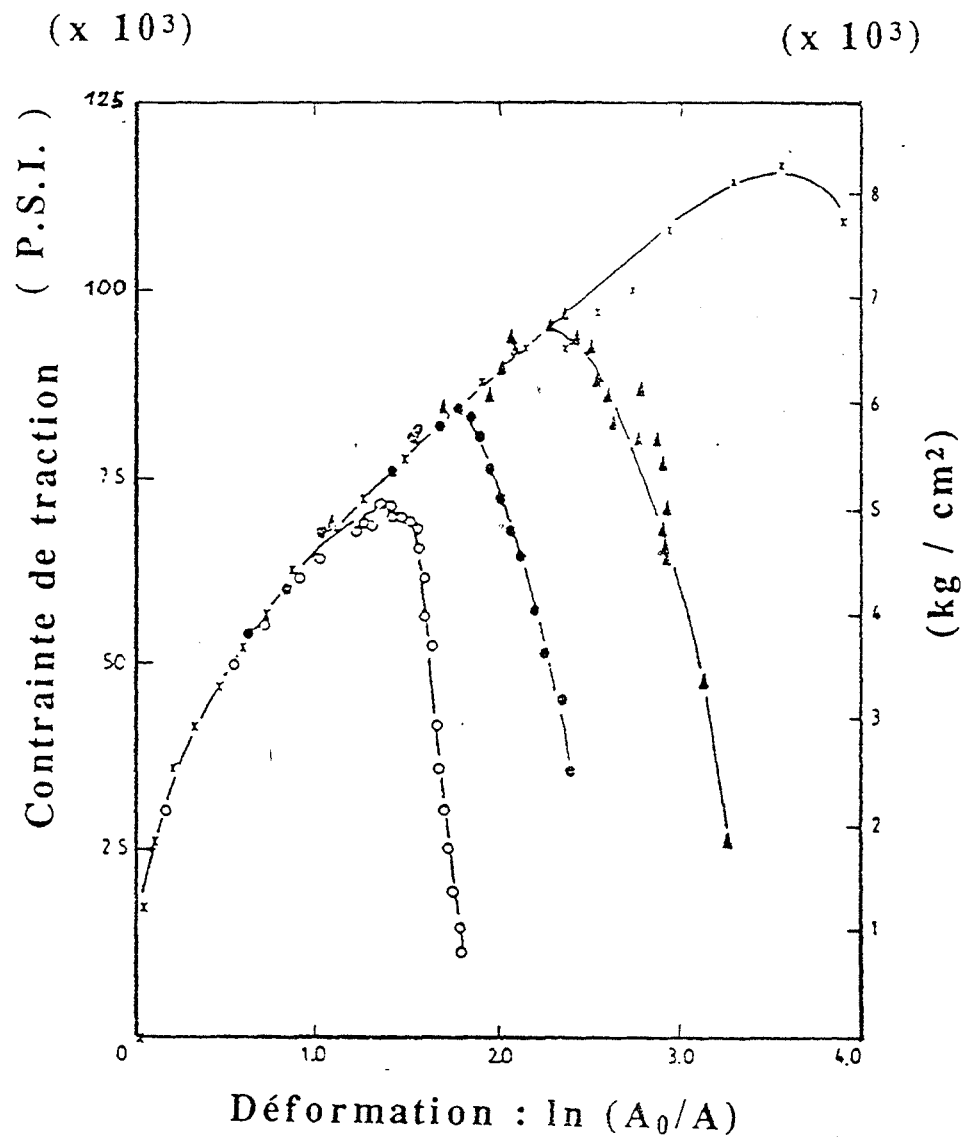
**CROISSANCE D'UNE CAVITE ELLIPSOIDALE DE REVOLUTION  
DANS UNE MATRICE VISCOPLASTIQUE LINEAIRE COMPRESSIBLE**



## CHAPITRE I

### CROISSANCE D'UNE CAVITE ELLIPSOIDALE DE REVOLUTION DANS UNE MATRICE VISCOPLASTIQUE LINEAIRE COMPRESSIBLE

I. INTRODUCTION - SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE .....	6
I.1. Matrice élastique .....	7
I.2. Matrice viscoplastique linéaire .....	10
II. PRESENTATION DU MODELE .....	13
II.1. Géométrie et chargement .....	13
II.2. Comportement du matériau .....	14
II.3. La méthode des trois potentiels .....	15
II.4. Importance du choix des paramètres de chargement et de la déformation de référence .....	19
III. DISCUSSION DES RESULTATS .....	21
III.1. Evolution du rayon moyen .....	21
III.2. Evolution du volume .....	21
III.3. Evolution de l'excentricité .....	22
III.4. Triaxialité critique .....	24
III.5. Cartes d'isovaleurs de contrainte moyenne et de vitesse de déformation équivalente de von Mises .....	26
III.5.1. Champ de contrainte moyenne .....	26
III.5.2. Champ de vitesse de déformation équivalente de von Mises .....	27
IV. INTERPRÉTATION DES MODES DE VITESSE .....	28
IV.1. Mode 1 .....	29
IV.2. Mode 2 .....	29
IV.3. Mode 3 .....	30
IV.4. Champ total .....	31
IV.5. Comparaison avec la solution proposée par LEE et MEAR pour une matrice incompressible .....	32
V. CONCLUSION .....	33



**Figure 1 :** Effet de la pression sur la courbe contrainte-déformation pour un cuivre recuit OFHC : (o) 0,1 MPa, (•) 77 MPa, (▲) 155 MPa, (x) 309 MPa (PUGH et GREEN [1964])

## I. Introduction - Synthèse bibliographique

Ce chapitre concerne la détermination du champ de contrainte et de vitesse de déformation autour d'une cavité isolée dans une matrice *viscoplastique isotrope linéaire compressible* (BRIOTTET, KLÖCKER et MONTHEILLET [1993]). L'introduction de grandeurs équivalentes tenant compte de l'influence de la trace des tenseurs des contraintes et des vitesses de déformation permettra d'utiliser les résultats obtenus dans le deuxième chapitre.

En 1964, PUGH et GREEN montrent expérimentalement l'influence de la pression hydrostatique ( $p = -\sigma_m$ ) sur l'élongation à rupture (Figure 1). Certains auteurs (MONTHEILLET et MOUSSY [1986]) émettent l'hypothèse que pour une pression hydrostatique positive assez importante, la croissance des cavités peut être stoppée. En 1974, COX et LOW montrent l'importance d'un deuxième paramètre : la triaxialité des contraintes (rapport entre la contrainte moyenne et la contrainte équivalente de von Mises). Ces résultats soulignent le rôle fondamental de la contrainte moyenne lors de la croissance de l'endommagement. Dans un premier temps, nous passons en revue les différents modèles présents dans la littérature.

Dans tous les modèles qui vont suivre, certaines hypothèses sont communes : le matériau considéré est linéaire, homogène et isotrope. Les interactions entre les cavités sont négligées : cela revient à étudier une cavité isolée dans une matrice infinie, dont le comportement sera ultérieurement déterminé par des méthodes d'homogénéisation. Pour une fraction volumique de cavités inférieure à 1%, des expériences montrent que cette hypothèse est tout à fait justifiée (le rôle des interactions entre cavités est généralement reconnu comme accélérant la croissance des cavités et donc la rupture). Historiquement, les premières études effectuées dans ce cadre ont concerné des matrices élastiques.

### I.1. Matrice élastique

En 1933, GOODIER a étudié le champ de contrainte autour d'une inclusion élastique, sphérique ou cylindrique de section circulaire dans une matrice élastique homogène infinie soumise à un champ de contrainte axisymétrique à l'infini. Il montre qu'à une distance de quatre fois le rayon de l'inclusion la perturbation devient inférieure à 1 % de la contrainte uniforme. SADOWSKY et STERNBERG [1947] ont étudié le cas d'une cavité ellipsoïdale de révolution dans une matrice chargée en contraintes planes perpendiculairement à l'axe de symétrie, puis celui d'une cavité ellipsoïdale quelconque. Dans ces études, le rayon moyen  $R$  de l'inclusion est pris unitaire et constant ; les auteurs ne se sont donc pas intéressés à la croissance de la cavité, mais uniquement au champ de contrainte dans la configuration initiale.

En 1951, EDWARDS détermine les champs de contrainte et de déformation autour d'une inclusion ellipsoïdale de révolution élastique linéaire isotrope dans une matrice infinie élastique linéaire isotrope, sous un chargement axisymétrique. Cependant, l'auteur ne s'intéresse pas au cas particulier de la croissance de l'endommagement.

Toutes ces études ont mis en évidence un résultat remarquable : *dans l'inclusion l'état de déformation est homogène*. Ce résultat a été observé auparavant dans d'autres domaines : magnétisme pour l'aimantation ( $\bar{M}$ ), diélectriques avec la polarisation ( $\bar{P}$ ). Cette constatation a ouvert la voie aux travaux d'ESHELBY, qui permettront de déterminer l'état de contrainte et de déformation dans une inclusion ellipsoïdale. De nombreux problèmes de micro-mécanique utilisent ces résultats.

#### \* *L'approche d'ESHELBY*

ESHELBY [1957, 1959] a étudié une inclusion ellipsoïdale isotrope de constantes élastiques différentes de celles de la matrice infinie, isotrope, soumise à une déformation homogène à l'infini. Sa démarche permet d'obtenir les déformations dans l'inclusion en soumettant un milieu *homogène* à des "déformations propres" ("eigenstrains") et cela sans connaître le champ de vitesse dans la matrice. Les déformations propres sont en général des déformations d'origine non élastique (expansion thermique, déformation plastique, changement de phase...), elles ne sont pas liées à des contraintes.



Notons que les anglo-saxons désignent par le terme "inclusion" une région de même comportement rhéologique que la matrice soumise à des déformations propres et par le terme "hétérogénéité" une région de comportement différent de celui de la matrice. En français le terme inclusion est employé dans les deux sens.

Le travail d'ESHELBY se décompose en deux parties. La première traite une région ellipsoïdale *de même modules que la matrice* soumise à des déformations propres, la seconde, nommée méthode de l'inclusion équivalente, utilise ce résultat pour résoudre le problème d'une inclusion dans une matrice infinie.

Soit un solide homogène D (Figure 2a) contenant une région  $\Omega$  (l'inclusion) de *mêmes* modules que la matrice, soumise à des déformations propres  $\varepsilon^*$ . Le raisonnement suivant est tenu par ESHELBY :

\* En premier lieu, l'inclusion est enlevée de la matrice et laissée libre de se déformer et de changer de volume.

\* Des contraintes élastiques lui sont appliquées afin de lui redonner sa forme et ses dimensions initiales. L'inclusion est alors replacée dans la matrice. A ce moment, les contraintes sont nulles dans la matrice mais pas dans l'inclusion.

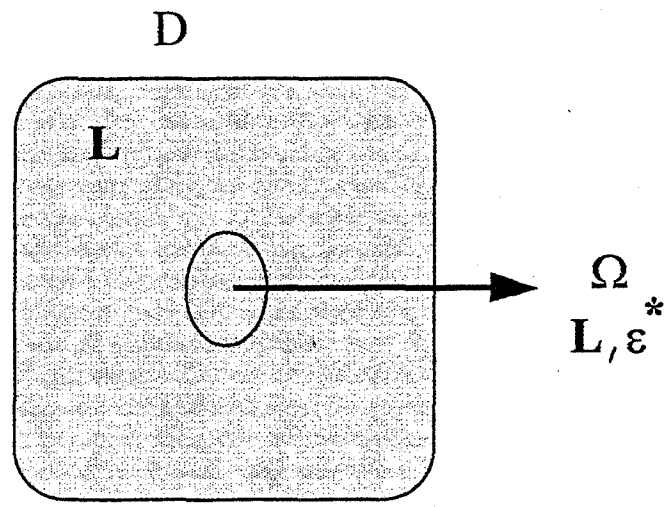
\* On laisse alors le champ de contrainte se relaxer en lui superposant une distribution de contraintes surfaciques opposées que l'on peut calculer à l'aide du tenseur de Green.

Pour rendre la déformation totale  $\varepsilon$  compatible (partie symétrique du gradient du vecteur déplacement), les déformations propres sont accompagnées de déformations élastiques  $e$  :

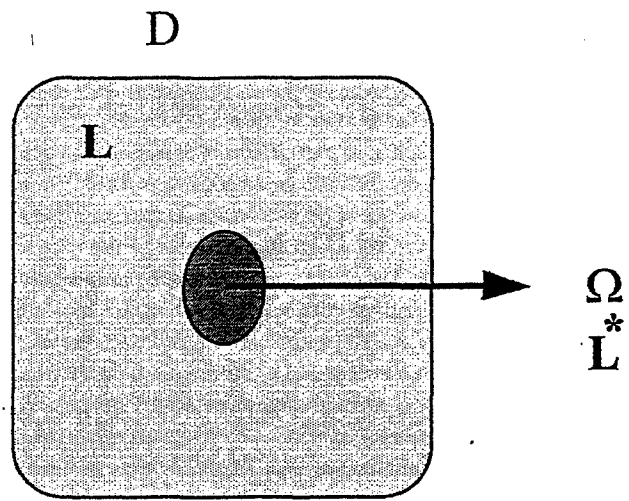
$$\varepsilon = \varepsilon^* + e \quad (1)$$

En utilisant les hypothèses énoncées ci-dessus, ESHELBY a relié les déformations totales aux déformations propres à l'intérieur de l'inclusion :

$$\varepsilon = S : \varepsilon^* \quad (2)$$



(a)



(b)

**Figure 2 :** Géométrie utilisée par Eshelby pour calculer l'état de déformation dans une région ellipsoïdale de la matrice soumise à des déformations propres (a) et pour la méthode de l'inclusion équivalente (b)

où  $S$  est un tenseur du quatrième ordre qui ne dépend que de la forme de la région  $\Omega$  et des modules élastiques de la matrice. Si les  $\varepsilon^*$  sont homogènes dans  $\Omega$  les déformations totales le sont aussi. Le résultat annoncé précédemment est donc retrouvé.

Ce cas résolu, ESHELBY montre que le problème hétérogène d'une inclusion dans une matrice infinie peut être transformé en un problème homogène au moyen de la *méthode de l'inclusion équivalente* :

Considérons (Figure 2b) un domaine élastique infini de modules  $L$  contenant une inclusion ellipsoïdale  $\Omega$  de modules  $L^*$ . Cette méthode permet d'étudier la perturbation due à l'inclusion sur un champ de contraintes homogènes.

Soit  $\sigma^\infty$  et  $\varepsilon^\infty$  les tenseurs de contraintes et de déformations homogènes à l'infini et  $\tilde{\sigma}$  et  $\tilde{\varepsilon}$  les perturbations dues à l'inclusion.

La loi de Hooke donne :

$$\text{dans } \Omega \quad \sigma^\infty + \tilde{\sigma} = L^* : (\varepsilon^\infty + \tilde{\varepsilon}) \quad (3)$$

$$\text{dans } D-\Omega \quad \sigma^\infty + \tilde{\sigma} = L : (\varepsilon^\infty + \tilde{\varepsilon}) \quad (4)$$

Considérons maintenant le même domaine élastique infini contenant une inclusion  $\Omega$  de même module  $L$  et soumise à des déformations propres  $\varepsilon^*$ . L'ensemble est soumis aux contraintes uniformes  $\sigma^\infty$ . Pour obtenir les contraintes dans l'inclusion nous ne devons tenir compte que des déformations élastiques dans celle-ci :

$$\text{dans } \Omega \quad \sigma^\infty + \tilde{\sigma} = L : (\varepsilon^\infty + \tilde{\varepsilon} - \varepsilon^*) \quad (5)$$

$$\text{dans } D-\Omega \quad \sigma^\infty + \tilde{\sigma} = L : (\varepsilon^\infty + \tilde{\varepsilon}) \quad (6)$$

D'après ESHELBY, les déformations de perturbation sont reliées aux déformations résiduelles par la relation :

$$\tilde{\varepsilon} = S : \varepsilon^* \quad (7)$$

Pour que les contraintes et les déformations de perturbation dans  $\Omega$  soient les mêmes dans les deux cas, il faut :

$$L : (\varepsilon^\infty + S : \varepsilon^* - \varepsilon^*) = L^* : (\varepsilon^\infty + S : \varepsilon^*) \quad (8)$$

La déformation dans l'inclusion s'écrit donc finalement :

$$\varepsilon^I = \varepsilon^\infty + \tilde{\varepsilon} = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{S} : \mathbf{L}^{-1} : (\mathbf{L}^* - \mathbf{L}) \right]^{-1} : \varepsilon^\infty \quad (9)$$

Cette méthode permet donc de réduire le problème d'une inclusion dans une matrice de propriétés mécaniques différentes à celui d'une inclusion dans une matrice de même propriétés mécaniques soumise à des déformations propres. En pratique,  $\mathbf{S}$  n'a été calculé analytiquement que dans une matrice isotrope (ESHELBY [1957]) ou isotrope transverse (MURA [1987]).

Le problème précédemment décrit est souvent intitulé dans la littérature "problème auxiliaire". HILL [1965] en propose une approche différente en faisant intervenir un tenseur de polarisation (chapitre III) correspondant dans l'équation précédente à  $\mathbf{P} = \mathbf{S} : \mathbf{L}^{-1}$  lorsque l'inclusion considérée est ellipsoïdale.

## 1.2. Matrice viscoplastique linéaire

Il est possible d'étendre les résultats de l'élasticité linéaire à la viscoplasticité linéaire en remplaçant les déplacements (resp. déformations) par les vitesses (resp. vitesses de déformation). Cependant, lorsque l'endommagement plastique de la matrice n'est pas pris en compte, la matrice et les inclusions sont supposées incompressibles, la partie élastique étant négligée devant l'importance des déformations plastiques considérées dans les modélisations de la mise en forme.

Des études ont donc suivi pour rendre compte de la plasticité. En 1962, BERG a étudié l'évolution d'une cavité cylindrique de section elliptique (de demi-axes  $a$  et  $b$ ) dans une matrice newtonienne ( $\bar{\sigma}_{vm} = k \dot{\bar{\varepsilon}}_{vm}$  où  $\bar{\sigma}_{vm}$  et  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{vm}$  sont les contrainte et vitesse de déformation équivalentes de von Mises) soumise à un chargement homogène à l'infini. Pour un chargement dont les axes sont confondus avec les axes principaux de la cavité, BERG a montré que les vitesses de croissance logarithmiques  $\dot{R}/(\dot{\bar{\varepsilon}}_{vm}^\infty R)$  et de changement de forme normalisées  $\dot{e}_c/\dot{\bar{\varepsilon}}_{vm}^\infty$  ( $R = (a + b) / 2$  ;  $e_c = (a - b) / (a + b)$ ) ne dépendent que de la triaxialité à l'infini.

En se fondant sur les résultats d'ESHELBY obtenus en élasticité, BUDIANSKY, HUTCHINSON et SLUTSKY [1982] ont étudié une cavité ellipsoïdale

de révolution dans une matrice newtonienne chargée de façon axisymétrique à l'infini. Cette analyse permet de connaître les changements de volume et de forme de la cavité. La forme et le volume asymptotiques de la cavité en fonction du chargement imposé peuvent être obtenus. En revanche, le champ de vitesse dans la matrice n'est pas calculé.

En 1992, KLÖCKER et MONTHEILLET ont étudié une cavité ellipsoïdale de révolution dans une matrice newtonienne incompressible. Pour ce faire, ils utilisent la méthode des trois potentiels proposées par BOUSSINESQ [1885], puis adaptées par PAPCOVICH [1932]. Ils obtiennent alors le champ de vitesse complet dans la matrice ; celui-ci a la forme suivante:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^\infty + \alpha_1 \bar{\mathbf{g}}^1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{g}}^2 + \alpha_3 \bar{\mathbf{g}}^3 \quad (10)$$

où :  $\bar{\mathbf{g}}^1$  : est un champ de croissance volumique pure

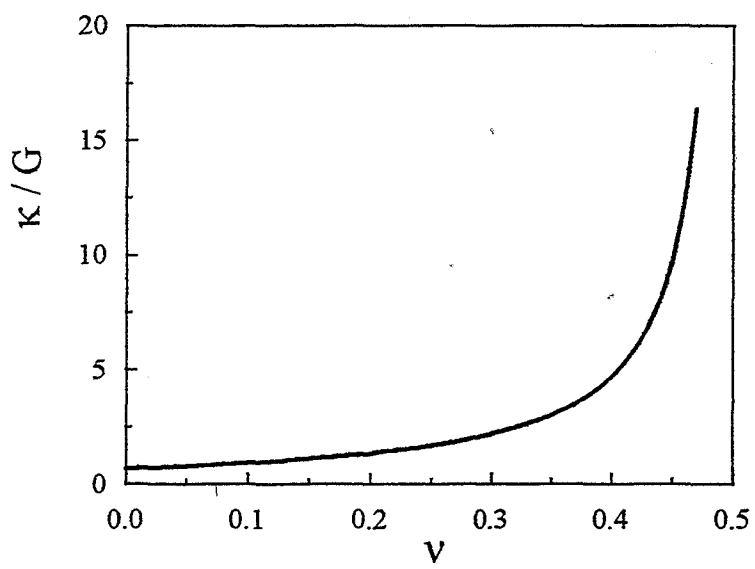
$\bar{\mathbf{g}}^2$  : un champ de distorsion pure

$\bar{\mathbf{g}}^3$  : un champ mixte agissant à la fois sur le volume et sur la forme de la cavité.

A l'aide de ces résultats, les auteurs étudient la croissance du volume et le changement de forme de la cavité au cours du chargement. Ils s'intéressent de plus à la forme du champ de contraintes et de vitesses de déformation autour de celle-ci. Les possibilités d'endommagement secondaire induit par la présence d'une cavité peuvent ainsi être abordés.

L'approche suivante généralise ces travaux au cas d'une matrice viscoplastique linéaire *compressible*. Les résultats obtenus permettront de déduire des renseignements précieux sur l'évolution du volume et de l'excentricité d'une cavité isolée dans une matrice endommagée.

L'influence de la compressibilité de la matrice sur l'évolution de l'endommagement est étudiée en détail. Cet aspect a été laissé de côté dans les études concernant les matériaux élastiques puisque les paramètres rhéologiques étaient imposés et que l'endommagement n'évoluait pas. La discussion des courbes sera fondée sur la comparaison entre une matrice poreuse et une matrice incompressible. La compressibilité de la matrice est liée à la grandeur



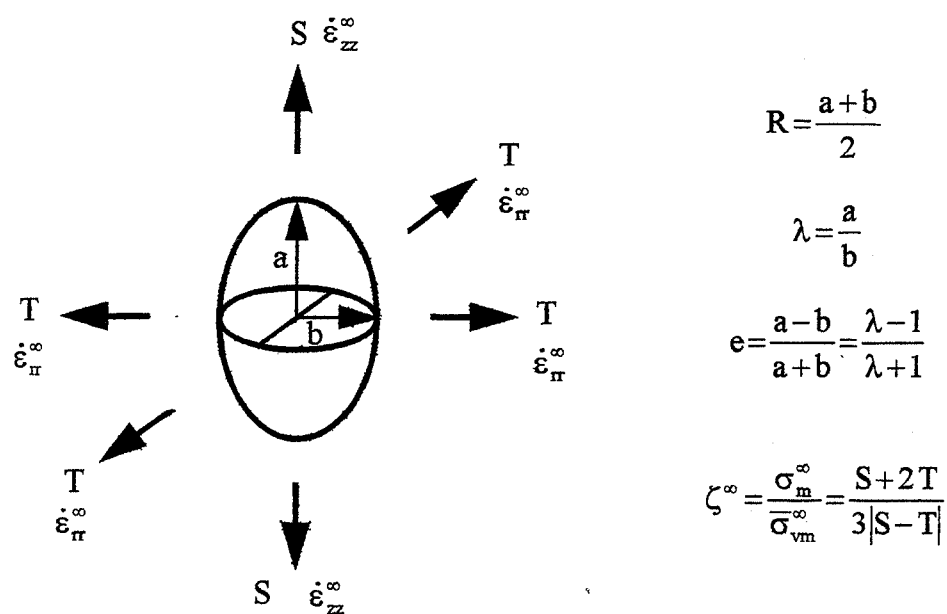
**Figure 3 :** Relation entre le module de compressibilité et le module de Poisson  
(à  $G$  constant)

rhéologique  $\kappa$ . Toutes les courbes qui vont suivre sont tracées à  $G$  constant ; or comme  $\kappa = 2 (1 + \nu) / (3 (1 - 2 \nu)) G$  ; il existe une relation biunivoque entre  $\nu$  et  $\kappa$ . Nous emploierons donc indifféremment l'une ou l'autre grandeur en rappelant que le cas incompressible est obtenu pour  $\nu = 0,5$  ou  $\kappa \rightarrow \infty$ . Sur la figure 3 est porté  $\kappa/G$  en fonction de  $\nu$  afin de mettre en évidence la décroissance très rapide de  $\kappa$  lorsque  $\nu$  s'écarte de 0,5. Insistons à nouveau sur le fait que les coefficients  $\kappa$ ,  $G$  et  $\nu$  (ainsi nommés du fait d'une grande similarité avec l'élasticité) sont *des viscosités*, l'élasticité de la matrice est négligée.

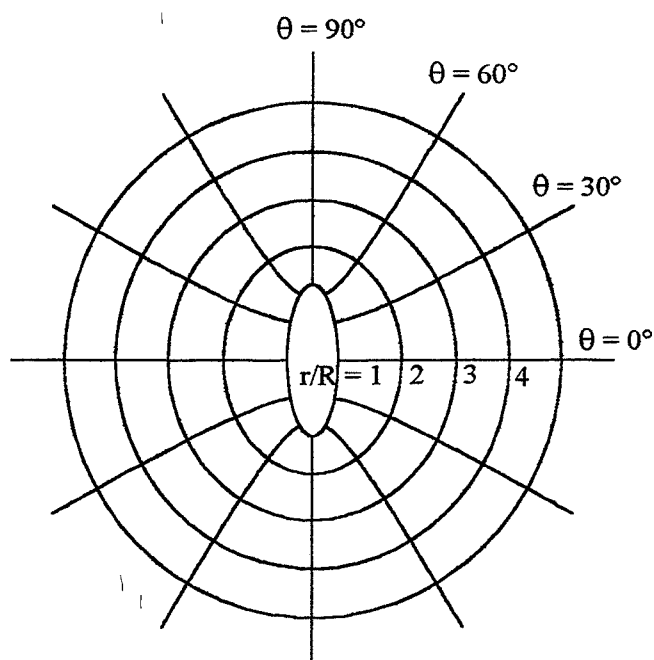
Lors de l'analyse des résultats, le choix du couple de chargement imposé à l'infini, ainsi que de la déformation de référence, peuvent entraîner des interprétations différentes. Après avoir expliqué ce phénomène, nous ferons le choix du chargement imposé  $(\zeta^\infty, \dot{\epsilon}_{zz}^\infty)$  où  $\zeta^\infty$  est la triaxialité des contraintes à l'infini (rapport de la contrainte moyenne et de la contrainte équivalente de von Mises) et de la déformation de référence  $\epsilon_{zz}^\infty = \int \dot{\epsilon}_{zz}^\infty dt$ .

Finalement, une interprétation approfondie des modes de vitesses sera donnée ; celle-ci est capitale pour faire le choix d'un bon champ de vitesses dans la modélisation de matrices non linéaires.





**Figure 4a :** Géométrie de la cavité et mode de chargement étudiés



**Figure 4b :** Système de coordonnées ellipsoïdales de révolution dans un plan méridien

## II. Présentation du modèle

### II.1. Géométrie et chargement

Sur la figure 4a sont définis la géométrie et les paramètres de chargement du problème, en gardant les notations proposées par BUDIANSKY et al. [1982]. On considère une matrice viscoplastique linéaire *compressible* contenant une cavité ellipsoïdale de révolution de demi-axes  $a$  (direction axiale) et  $b$  (direction radiale). La géométrie de la cavité est caractérisée par le rapport de forme  $\lambda = a / b$  ou l'excentricité  $e = (a-b) / (a+b) = (\lambda-1) / (\lambda+1)$  et le rayon moyen  $R = (a+b) / 2$ .

L'ensemble est soumis à un état de contrainte uniforme, axisymétrique de directions principales parallèles aux axes de la cavité :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{\infty} &= \sigma_{yy}^{\infty} = T \\ \sigma_{zz}^{\infty} &= S \\ \sigma_{xy}^{\infty} &= \sigma_{xz}^{\infty} = \sigma_{yz}^{\infty} = 0\end{aligned}\tag{11}$$

On note de plus  $\bar{\sigma}_{vm}^{\infty} = |S-T|$  la contrainte équivalente de von Mises à l'infini et  $\sigma_m^{\infty} = (S+2T)/3$  la contrainte moyenne à l'infini.

Le système de coordonnées adopté est celui proposé par KLÖCKER et MONTHEILLET [1992] :

$$\begin{cases} x = R \left( \frac{r}{R} - e \frac{R}{r} \right) \cos \theta \cos \varphi \\ y = R \left( \frac{r}{R} - e \frac{R}{r} \right) \cos \theta \sin \varphi \\ z = R \left( \frac{r}{R} + e \frac{R}{r} \right) \sin \theta \end{cases}\tag{12}$$

L'utilisation de ces coordonnées ellipsoïdales de révolution (Figure 4b) permet de décrire la surface de la cavité par  $r = R$ . Ce système est particulièrement adapté à l'étude de l'évolution de la cavité au cours de la déformation car il est paramétré, de façon indépendante, par le rayon moyen  $R$  et l'excentricité  $e$  de la cavité.



## II.2. Comportement du matériau

Le comportement de la matrice considérée est une extension à la viscoplasticité linéaire de la loi de Hooke. Celle-ci s'écrit alors :

$$\sigma = 2G\dot{\epsilon} + \kappa \text{tr}(\dot{\epsilon})\mathbf{I} \quad (13)$$

où  $\dot{\epsilon}$  est la partie déviatorique du tenseur des vitesses de déformation et  $\text{tr}(\dot{\epsilon})$  représente la trace de  $\dot{\epsilon}$ . Il est alors possible d'écrire le comportement du matériau de la façon suivante en admettant la loi de normalité :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{vm} = 3G\dot{\epsilon}_{vm} \\ \sigma_m = \kappa \text{tr}(\dot{\epsilon}) = \kappa \dot{\epsilon}_{kk} \end{cases} \quad (14)$$

Le potentiel plastique s'obtient alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \varphi(\dot{\epsilon}) &= \int \sigma_{ij} d\dot{\epsilon}_{ij} = \int s_{ij} d\dot{\epsilon}_{ij} + \int \sigma_m d\dot{\epsilon}_{kk} \\ \varphi(\dot{\epsilon}) &= \frac{3G\dot{\epsilon}_{vm}^2}{2} + \frac{\kappa \dot{\epsilon}_{kk}^2}{2} = \frac{\bar{\sigma}_{vm}^2}{6G} + \frac{\sigma_m^2}{2\kappa} = \psi(\sigma) \end{aligned} \quad (15)$$

où  $s$  est le déviateur des contraintes. A l'aide de la loi de normalité, il vient :

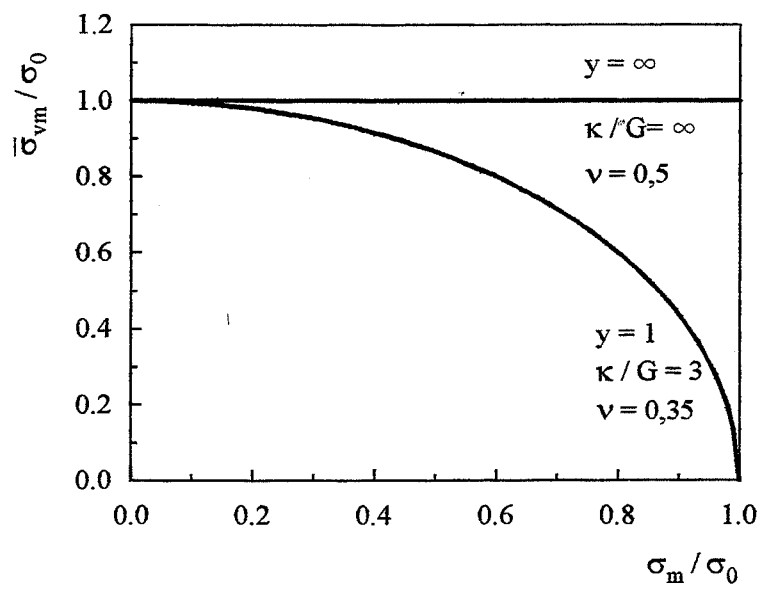
$$\begin{aligned} s_{ij} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}_{vm}}{\dot{\epsilon}_{vm}} \dot{\epsilon}_{ij} = 2G\dot{\epsilon}_{ij} \\ \sigma_m &= \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\epsilon}_{kk}} = \kappa \dot{\epsilon}_{kk} \end{aligned} \quad (16)$$

qui correspondent bien à la relation (13).

Pour l'étude de la croissance d'une cavité dans une matrice newtonienne compressible, l'écriture du comportement proposée ci-dessus est suffisante. Cependant, dans le but de s'appuyer sur les résultats obtenus dans le présent chapitre pour étendre l'étude au comportement non linéaire, il est nécessaire de proposer un formalisme qui permettra de caractériser le comportement à l'aide d'une seule équation. Il faut donc introduire d'autres grandeurs équivalentes tenant compte de l'influence de la pression. En 1976, SHIMA et OYANE ont étudié un matériau poreux rigide parfaitement plastique en introduisant la contrainte équivalente suivante :

$$\bar{\sigma}_{eq} = \sqrt{\bar{\sigma}_{vm}^2 + (z\sigma_m)^2} \quad (17)$$

où  $z$  est une mesure de l'influence de la contrainte moyenne dans le critère de plasticité. Ce paramètre est directement lié à la compressibilité de la matrice.



**Figure 5 :** Forme du critère elliptique avec  $\sigma_0 = k \dot{\bar{\epsilon}}_0$   
où  $\dot{\bar{\epsilon}}_0$  est une vitesse de déformation de référence

Ce formalisme est l'extension la plus simple au domaine compressible du critère de von Mises. En définissant une vitesse de déformation équivalente par :

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{eq} = \sqrt{\dot{\bar{\epsilon}}_{vm}^2 + (y \dot{\epsilon}_{kk})^2} \quad (18)$$

le comportement suivant est recherché :

$$\bar{\sigma}_{eq} = k \dot{\bar{\epsilon}}_{eq} \quad (19)$$

Le potentiel plastique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \bar{\sigma}_{eq} d\dot{\bar{\epsilon}}_{eq} = \frac{\bar{\sigma}_{eq} \dot{\bar{\epsilon}}_{eq}}{2} \\ \varphi &= \frac{k}{2} (\dot{\bar{\epsilon}}_{vm}^2 + y^2 \dot{\epsilon}_{kk}^2) = \frac{1}{2k} (\bar{\sigma}_{vm}^2 + z^2 \sigma_m^2) = \psi \end{aligned} \quad (20)$$

Ceci implique, à l'aide des équations (15) et (20) :

$$k = 3G \quad \text{et} \quad z^2 = \frac{3G}{\kappa} = \frac{1}{y^2} \quad (21)$$

Finalement, le comportement du matériau peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\sqrt{\bar{\sigma}_{vm}^2 + (\sigma_m / y)^2} = \bar{\sigma}_{eq} = k \dot{\bar{\epsilon}}_{eq} = k \sqrt{\dot{\bar{\epsilon}}_{vm}^2 + (y \dot{\epsilon}_{kk})^2} \quad (22)$$

et

$$\begin{cases} s_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}_{eq}}{\dot{\bar{\epsilon}}_{eq}} \dot{\epsilon}_{ij} = 2G \dot{\epsilon}_{ij} \\ \sigma_m = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\epsilon}_{kk}} = y^2 \frac{\bar{\sigma}_{eq}}{\dot{\bar{\epsilon}}_{eq}} \dot{\epsilon}_{kk} = \kappa \dot{\epsilon}_{kk} \end{cases} \quad (23)$$

La figure 5 présente la forme du critère elliptique proposé dans le cas incompressible ( $y \rightarrow \infty$ ) et compressible.

### II.3. La méthode des trois potentiels

La méthode de résolution choisie est similaire à la méthode des trois potentiels utilisée en élasticité (BOUSSINESQ [1885], PAPCOVICH [1932]) et reprise par KLÖCKER [1992] pour une matrice viscoplastique linéaire incompressible. En combinant la loi de Hooke, les équations d'équilibre et la définition des petites déformations,  $\dot{\mathbf{u}}$  étant le champ de vitesse, on a :

$$\Delta \dot{\vec{u}} + \left( \frac{\kappa}{G} + \frac{1}{3} \right) \vec{\text{grad}} (\text{div } \dot{\vec{u}}) = \Delta \dot{\vec{u}} + \frac{1}{(1-2\nu)} \vec{\text{grad}} (\text{div } \dot{\vec{u}}) = \vec{0} \quad (24)$$

Le champ de vitesse autour d'une perturbation locale dans une matrice infinie est la superposition du champ à l'infini et du champ dû à la présence de la perturbation :  $\dot{\vec{u}} = \dot{\vec{u}}^\infty + \dot{\vec{u}}^{\text{pert}}$ . Dans le cas de la symétrie de révolution, la résolution de l'équation (24) se ramène à l'équation suivante (PAPCOVICH [1932]) :

$$\dot{\vec{u}} = \dot{\vec{u}}^\infty + \vec{\text{grad}} \beta + z \vec{\text{grad}} A_z - \frac{7+3\kappa/G}{1+3\kappa/G} A_z \vec{e}_z = \dot{\vec{u}}^\infty + \vec{\text{grad}} \beta + z \vec{\text{grad}} A_z - (3-4\nu) A_z \vec{e}_z \quad (25)$$

$$\text{avec} \quad \Delta A_z = \Delta \beta = 0 \quad (26)$$

Il reste donc uniquement deux potentiels harmoniques *scalaires* à déterminer. Exprimons le laplacien dans le système de coordonnées (12) :

$$\Delta \phi = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \frac{r}{R} - e \frac{R}{r} \right) \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \left( \frac{r}{R} - e \frac{R}{r} \right) \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (27)$$

Recherchons une base de solutions particulière à variables séparées  $r$  et  $\theta$  de sorte que la solution générale s'écrive :

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r) T_n(\theta) \quad (28)$$

$\Delta \phi = 0$  peut alors, pour chaque  $n$ , se mettre sous la forme :

$$\frac{r}{\left( \frac{r}{R} - e \frac{R}{r} \right) R_n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \frac{r}{R} - e \frac{R}{r} \right) \frac{\partial R_n}{\partial r} \right) + \frac{1}{T_n \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \frac{\partial T_n}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (29)$$

Cette équation est vérifiée si :

$$\frac{r}{\left( \frac{r}{R} - e \frac{R}{r} \right) R_n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \frac{r}{R} - e \frac{R}{r} \right) \frac{\partial R_n}{\partial r} \right) = k = - \frac{1}{T_n \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \frac{\partial T_n}{\partial \theta} \right) \quad (30)$$

où  $k$  est une constante.

En effectuant le changement de variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} s = \frac{\left( \frac{r}{R} + e \frac{R}{r} \right)}{2\sqrt{e}} \\ \bar{s} = \frac{\left( \frac{r}{R} - e \frac{R}{r} \right)}{2\sqrt{e}} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} t = \sin \theta \\ \bar{t} = \cos \theta \end{array} \right. \quad (31)$$

(s, t,  $\phi$ ) restant un système de coordonnées curvilignes orthogonales, le système d'équations suivant est obtenu :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( (s^2 - 1) \frac{\partial R_n}{\partial s} \right) - k R_n = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \left( (t^2 - 1) \frac{\partial T_n}{\partial t} \right) - k T_n \quad (32)$$

Ces deux relations, symétriques en s et t, sont les équations de Legendre si k peut s'écrire sous la forme  $k = n(n+1)$  où n est un entier (pour e négatif,  $k = i n(n+1)$  où  $i^2 = -1$ ). En fait, ces valeurs de k sont suffisantes pour obtenir l'ensemble des solutions car les fonctions de Legendre forment un espace complet.

La résolution de notre problème aboutit donc finalement à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \sum_{i=0}^{\infty} [a_i P_i(s) + b_i Q_i(s)] P_i(t) \\ A_z = \sum_{i=0}^{\infty} [c_i P_i(s) + d_i Q_i(s)] P_i(t) \end{array} \right. \quad (33)$$

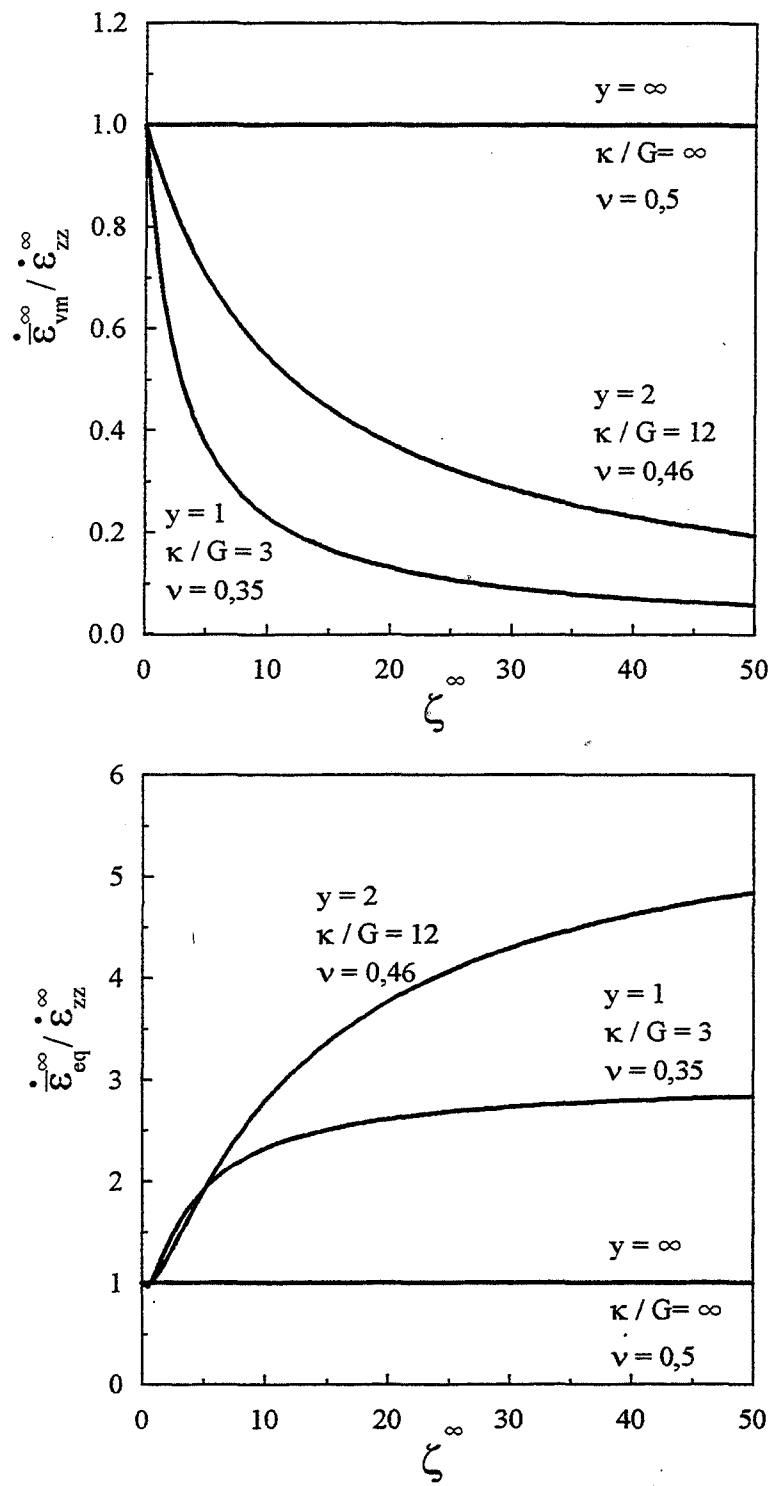
où les  $P_i$  et  $Q_i$  sont les polynômes de Legendre et fonctions de Legendre associées (Annexe 2).

L'expression des fonctions de Legendre change avec le signe de e. Dans le cas d'une cavité allongée suivant l'axe de traction ( $e > 0$ ) les potentiels  $\beta$  et  $A_z$  sont construits à partir de fonctions hyperboliques alors que dans le cas d'une cavité aplatie ( $e < 0$ ) ces potentiels sont construits à partir de fonctions circulaires de  $r/R$ .

Les champs solutions doivent de plus vérifier les conditions aux limites. En particulier, le champ de perturbation doit s'annuler à l'infini. L'équation (25) permet d'écrire :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \ddot{u} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\partial \beta}{\partial X_i} = \lim_{s \rightarrow +\infty} A_z = 0 \quad (34)$$





**Figure 6 :** Influence de la triaxialité, à compressibilité donnée, sur la relation entre les différentes déformations imposées à l'infini

En supposant que seules trois amplitudes sont non nulles - celles obtenues dans le cas incompressible par des considérations de flux de vitesse constant à travers toute surface fermée autour de la cavité (KLÖCKER [1991]) - il reste simplement :

$$\begin{aligned}\beta &= b_0 Q_0(s) + b_2 Q_2(s) P_2(t) \\ A_z &= a_1 Q_1(s) P_1(t)\end{aligned}\quad (35)$$

Nous appellerons désormais  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  les trois amplitudes restantes (l'amplitude  $\alpha_1$  est associée à  $Q_0(s)$ ,  $\alpha_2$  à  $Q_2(s)P_2(t)$  et  $\alpha_3$  à  $Q_1(s)P_1(t)$ ). Les conditions de continuité du vecteur contrainte à la surface de la cavité permettent de calculer sans ambiguïté ces trois constantes :

$$\begin{cases} \sigma_{ss}^\infty + \alpha_i \sigma_{ss}^i = 0 \\ \sigma_{st}^\infty + \alpha_i \sigma_{st}^i = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \sigma_{rr}^\infty + \alpha_i \sigma_{rr}^i = 0 \\ \sigma_{r\theta}^\infty + \alpha_i \sigma_{r\theta}^i = 0 \end{cases} \quad (36)$$

La solution analytique exacte du problème est donc obtenue.

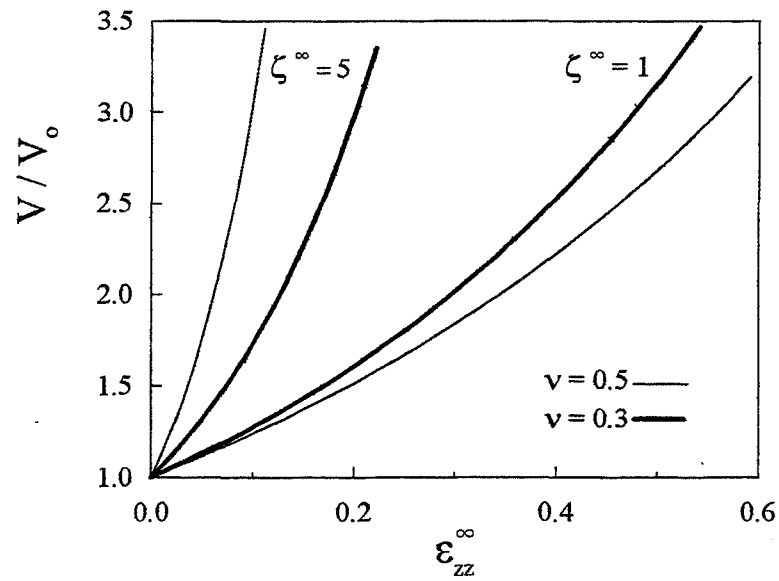
La méthode a mis en évidence 3 modes de vitesses que nous noterons désormais  $\bar{g}^i$ . Les amplitudes sont calculées pour un chargement unitaire et pour les deux cas suivants : chargement axial ( $\alpha_i^S$ ) et chargement radial ( $\alpha_i^T$ ). La solution générale est alors obtenue par superposition. Elle a l'avantage de fournir des amplitudes ne dépendant que de la forme de la cavité et de la compressibilité de la matrice. Le couple de chargement imposé étant  $(\zeta^\infty, \dot{\epsilon}_{zz}^\infty)$ , la solution prend la forme suivante :

$$\dot{\bar{u}} = \dot{\bar{u}}^\infty + \frac{3\kappa}{(\zeta^\infty + \chi\kappa/G)} \dot{\epsilon}_{zz}^\infty \sum_{i=1}^3 \left( \chi \frac{2\alpha_i^S(e, \kappa) - \alpha_i^T(e, \kappa)}{3} + \zeta^\infty [\alpha_i^S(e, \kappa) + \alpha_i^T(e, \kappa)] \right) \bar{g}^i \quad (37)$$

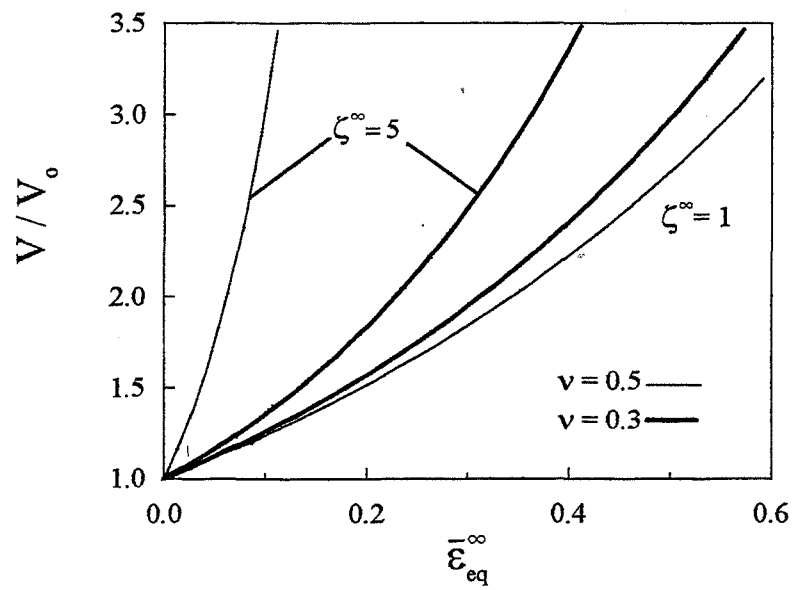
$$\text{avec} \quad \chi = \text{sgn}(S - T) = \begin{cases} +1 & \text{si } (S > T) \Leftrightarrow (\dot{\epsilon}_{zz}^\infty > \dot{\epsilon}_{xx}^\infty) \\ -1 & \text{si } (T > S) \Leftrightarrow (\dot{\epsilon}_{xx}^\infty > \dot{\epsilon}_{zz}^\infty) \end{cases} \quad (38)$$

Cette écriture permet une discussion aisée des effets dus à un changement des paramètres de chargement ou de la géométrie. Les champs complets sont donnés en Annexe 1.

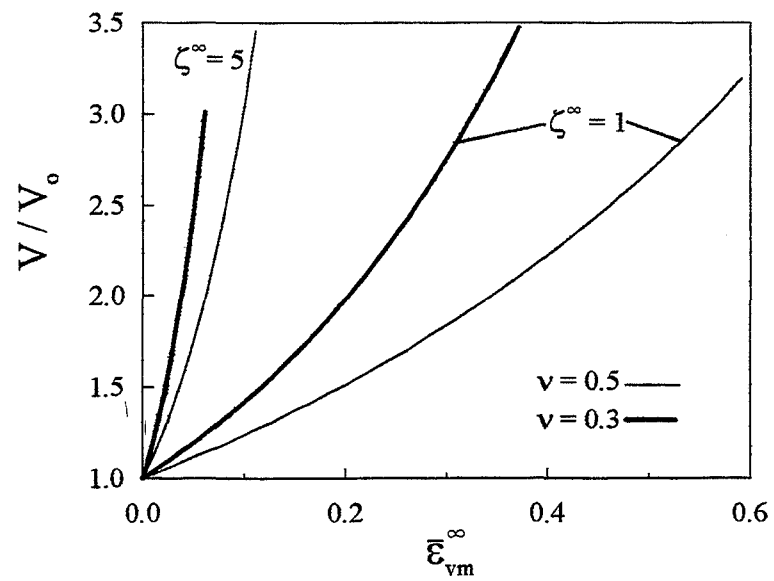
(a)



(b)



(c)



**Figure 7 :** Croissance volumique d'une cavité initialement sphérique en fonction de différentes déformations de référence

#### II.4. Importance du choix des paramètres de chargement et de la déformation de référence

Pour étudier l'influence de la porosité, deux matrices seront comparées: une matrice compressible ( $\nu = 0,3$ ) et une matrice incompressible ( $\nu = 0,5$ ) soumises au "même chargement". Cependant, la nature de la vitesse de déformation imposée ( $\dot{\epsilon}_{zz}^\infty$ ,  $\dot{\epsilon}_{eq}^\infty$ ,  $\dot{\epsilon}_{vm}^\infty$ ) n'est pas indifférent. En effet, dans le cas d'une matrice incompressible ces vitesses de déformation à l'infini sont égales :

$$\dot{\epsilon}_{zz}^\infty = \dot{\epsilon}_{eq}^\infty = \dot{\epsilon}_{vm}^\infty \quad (39)$$

En revanche, pour un matériau compressible, il vient :

$$\dot{\epsilon}_{eq}^\infty = 3y \frac{\sqrt{y^2 + \zeta^{\infty 2}}}{\chi 3y^2 + \zeta^\infty} \dot{\epsilon}_{zz}^\infty \quad \text{et} \quad \dot{\epsilon}_{vm}^\infty = \frac{3y^2}{\chi 3y^2 + \zeta^\infty} \dot{\epsilon}_{zz}^\infty \quad (40)$$

où  $\chi$  est défini par (38). La figure 6 présente l'influence de la compressibilité de la matrice sur ces grandeurs en fonction de la triaxialité imposée. Pour un comportement incompressible ( $\nu = 0,5$  ou  $y \rightarrow \infty$ ) les trois vitesses sont indépendantes de  $\zeta^\infty$ . Dans le cas d'un comportement compressible, lorsque  $\zeta^\infty$  augmente (à  $\dot{\epsilon}_{zz}^\infty$  imposée),  $\dot{\epsilon}_{eq}^\infty$  augmente et  $\dot{\epsilon}_{vm}^\infty$  diminue d'autant plus rapidement que la matrice est plus compressible. Lors de l'étude des dérivées temporelles  $\dot{\epsilon}$ ,  $\dot{R}/R$  et  $\dot{V}/V$ , l'influence de la compressibilité de la matrice doit être abordée en tenant compte de la *nature de la vitesse de déformation imposée*.

D'autre part, le choix de la *déformation de référence* a aussi une importance considérable sur l'étude de la croissance en faisant apparaître ou non des "effets" de la compressibilité. Sur la figure 7, la croissance volumique d'une cavité initialement sphérique est portée en fonction de trois déformations de référence. En fonction de  $\epsilon_{zz}^\infty = \int \dot{\epsilon}_{zz}^\infty dt$  ou de  $\bar{\epsilon}_{eq}^\infty = \int \dot{\epsilon}_{eq}^\infty dt$ , l'influence de la compressibilité dépend de la triaxialité (Figures 7a et b) : à faible triaxialité, la compressibilité augmente la croissance volumique, alors qu'à haute triaxialité elle la ralentit. En revanche, si le volume est porté en fonction de  $\bar{\epsilon}_{vm}^\infty = \int \dot{\epsilon}_{vm}^\infty dt$  (Figures 7c), la compressibilité augmente toujours la croissance volumique.

Dans la suite, le chargement imposé est toujours  $(\dot{\epsilon}_{zz}^\infty, \zeta^\infty)$  et l'évolution du volume et de l'excentricité de la cavité seront portés en fonction de la déformation axiale  $\epsilon_{zz}^\infty$ . Ces paramètres nous semblent pertinents car ils peuvent facilement être reliés à l'expérience.



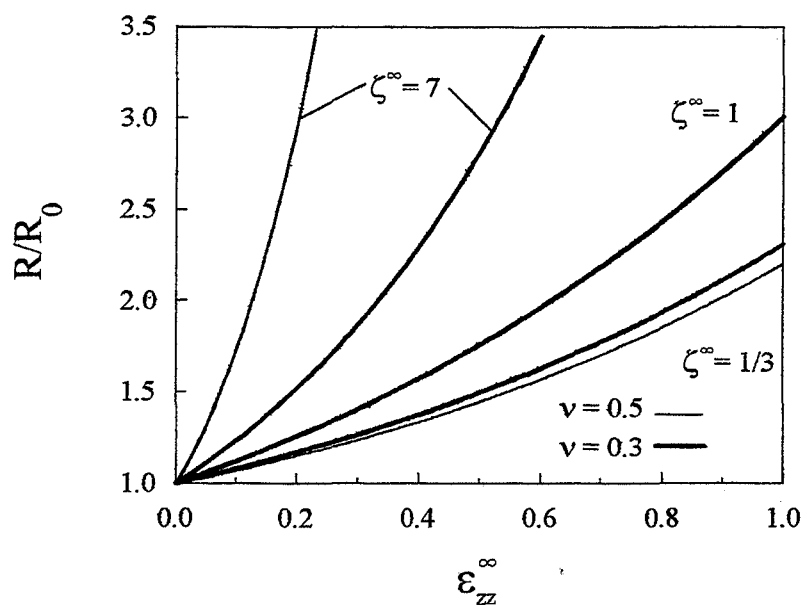
Notons finalement que  $\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty}$  ne peut pas être imposée de manière totalement indépendante de  $\zeta^{\infty}$ . En effet, la vitesse de déformation axiale  $\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty}$  et la vitesse de déformation équivalente à l'infini sont liées par la formule suivante (40) :

$$\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty} = \left[ \chi + \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \zeta^{\infty} \right] \dot{\epsilon}_{vm}^{\infty} = \left[ \chi + \frac{G}{K} \zeta^{\infty} \right] \dot{\epsilon}_{vm}^{\infty} \quad (41)$$

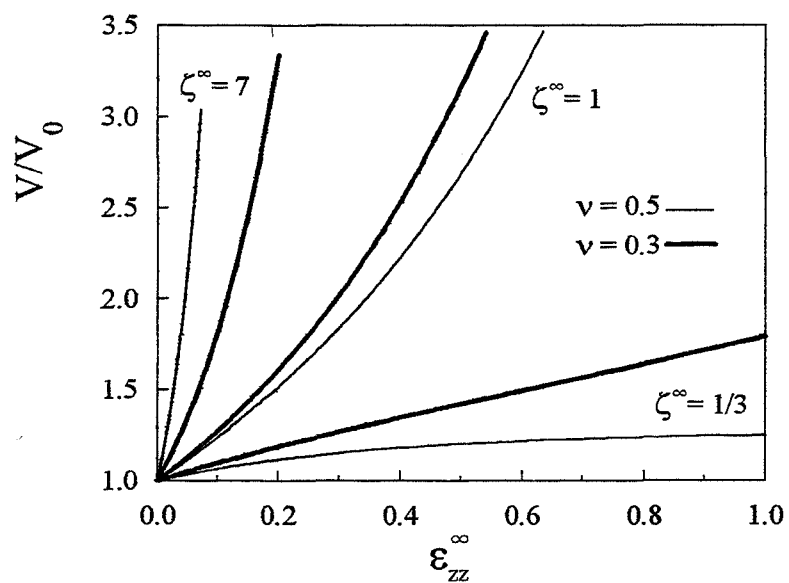
Pour un matériau incompressible  $\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty}$  ne s'annule qu'avec  $\dot{\epsilon}_{vm}^{\infty}$ . En revanche, pour un matériau compressible  $\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty}$  s'annule aussi si :

$$\zeta^{\infty} = \zeta_0 = -\chi \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} = -\chi \frac{K}{G} \quad (42)$$

Pour  $\nu = 0,5$  on peut donc imposer tout couple de chargement  $(\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty}, \zeta^{\infty})$  alors que pour  $\nu < 0,5$  si  $\zeta^{\infty} < \zeta_0$ ,  $\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty}$  doit être nécessairement négatif.



**Figure 8 :** Croissance du rayon moyen pour une cavité initialement sphérique



**Figure 9 :** Croissance volumique d'une cavité initialement sphérique

### III. Discussion des résultats

#### III.1. Evolution du rayon moyen

L'évolution du rayon moyen de la cavité en fonction de la déformation appliquée à l'infini pour une cavité initialement sphérique est présentée sur la figure 8. Il apparaît que l'influence de  $\nu$  ne va pas toujours dans le même sens. Pour une triaxialité imposée supérieure à 1, une matrice compressible ralentit fortement la croissance du rayon moyen de la cavité, alors que pour une triaxialité imposée inférieure à 1 cette même matrice accélère la croissance du rayon moyen. Plus la valeur de la triaxialité s'éloigne de la valeur 1, plus l'influence de la compressibilité de la matrice devient importante. Notons que cette valeur 1 est fortuite : la triaxialité correspondante à l'inversion de tendance dépend de la valeur de  $\nu$ . Dans tous les cas, plus la triaxialité augmente, plus la croissance du rayon moyen est importante.

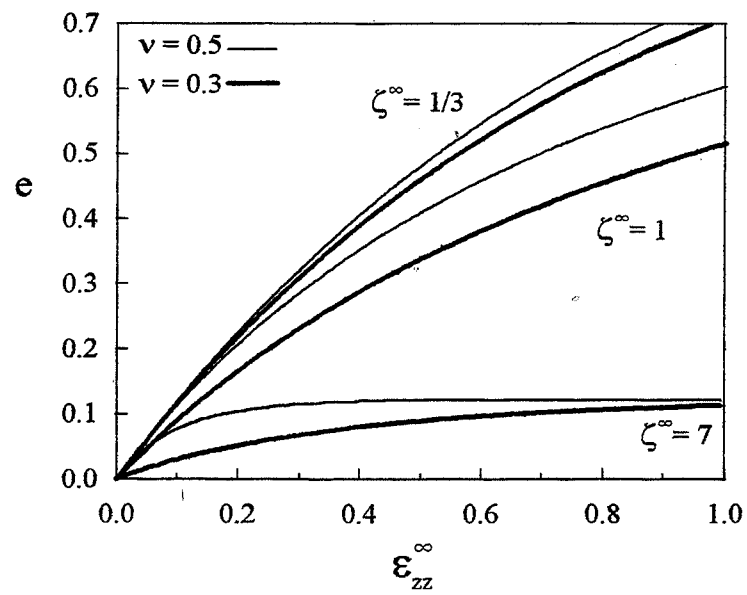
Cette figure met en évidence une première tendance importante : *un matériau compressible est moins sensible à la triaxialité.*

#### III.2. Evolution du volume

La vitesse de croissance logarithmique du volume s'exprime en fonction de celles de  $R$  et  $e$  :  $\dot{V}/V = 3 \dot{R}/R - (1 + 3e)/(1 - e^2) \dot{e}$ . Le volume de la cavité peut donc rester constant alors que son rayon moyen varie. La figure 9 montre l'évolution du volume en fonction de la déformation axiale à l'infini pour une cavité initialement sphérique. La même tendance que pour le rayon moyen est observée : à haute triaxialité, la compressibilité ralentit la croissance volumique alors qu'à faible triaxialité elle l'accélère. Pour une traction uniaxiale, on observe l'existence d'un volume asymptotique fini, déjà mis en évidence par BUDIANSKY et al. [1982], dans le cas incompressible. Celui-ci devient infini lorsque la matrice est endommagée.

Pour comprendre le changement d'influence de la compressibilité de la matrice en fonction de la triaxialité imposée, il faut garder en mémoire que la vitesse de déformation imposée est  $\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty}$ . A faible triaxialité ( $\zeta^{\infty} = 1/3$ ), dans le cas d'une matrice incompressible, celle-ci s'allonge longitudinalement et doit donc pour compenser se contracter radialement ( $\dot{\epsilon}_{xx}^{\infty} = -\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty}/2$ ). Pour la même vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty}$  imposée, une matrice compressible absorbe une





**Figure 10 :** Evolution de l'excentricité d'une cavité initialement sphérique pour plusieurs triaxialités

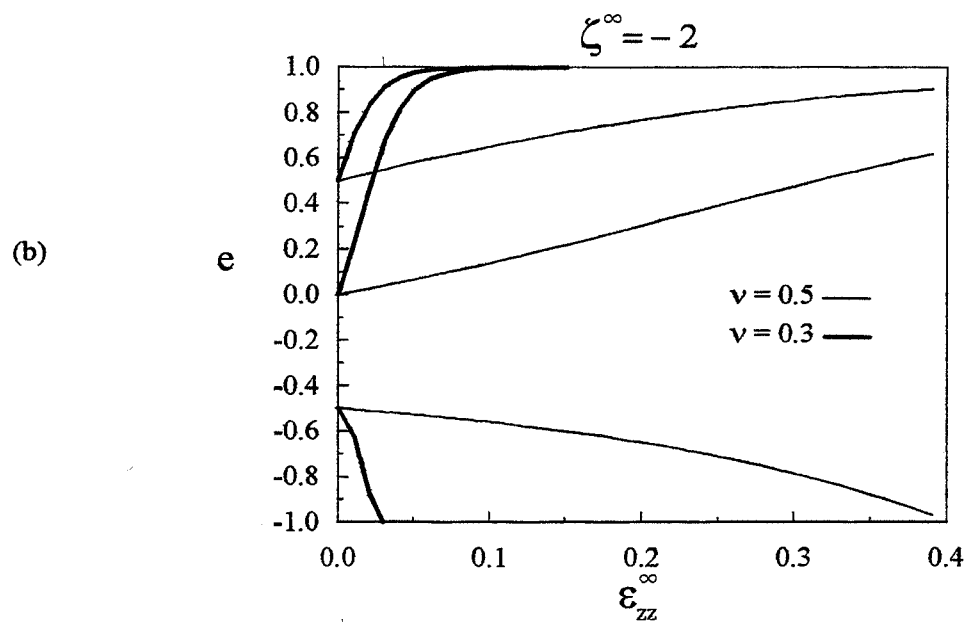
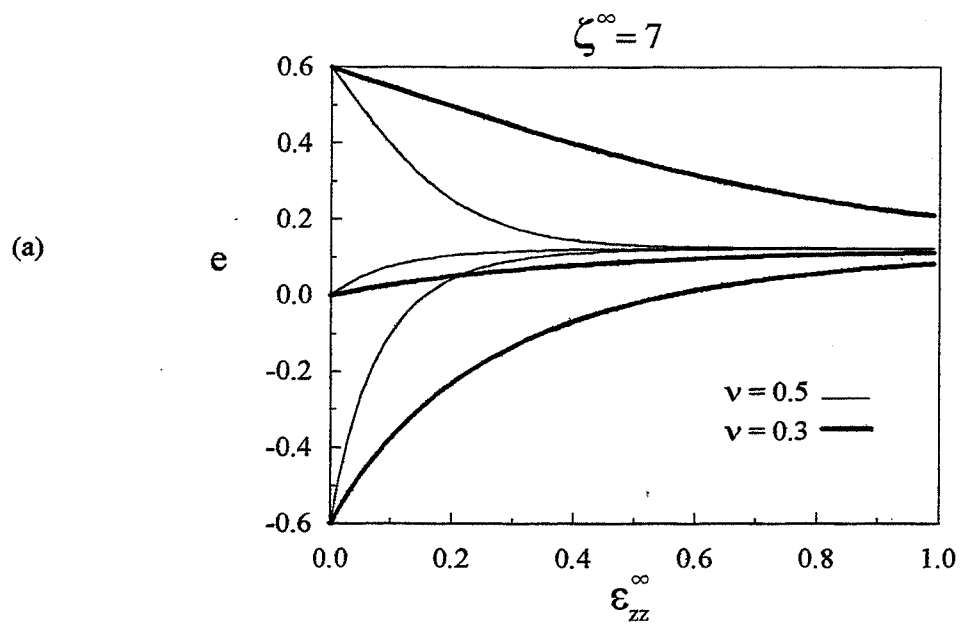
partie des déformations. Son retrait radial est donc moins important. Ceci explique que le volume de la cavité augmente plus rapidement dans la matrice compressible. A haute triaxialité ( $\zeta^\infty = 7$ ), la matrice compressible absorbe les déformations dans toutes les directions. La cavité est ainsi moins sollicitée et croît moins vite que dans une matrice incompressible.

### III.3. Evolution de l'excentricité

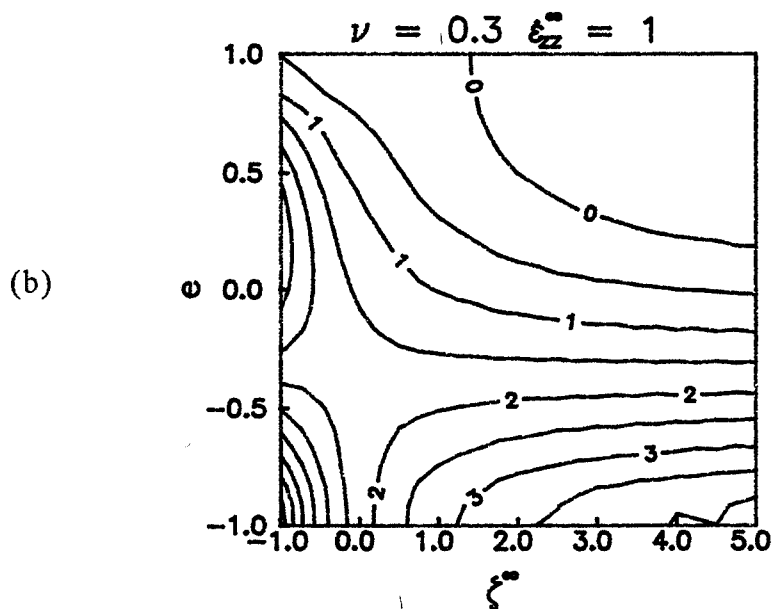
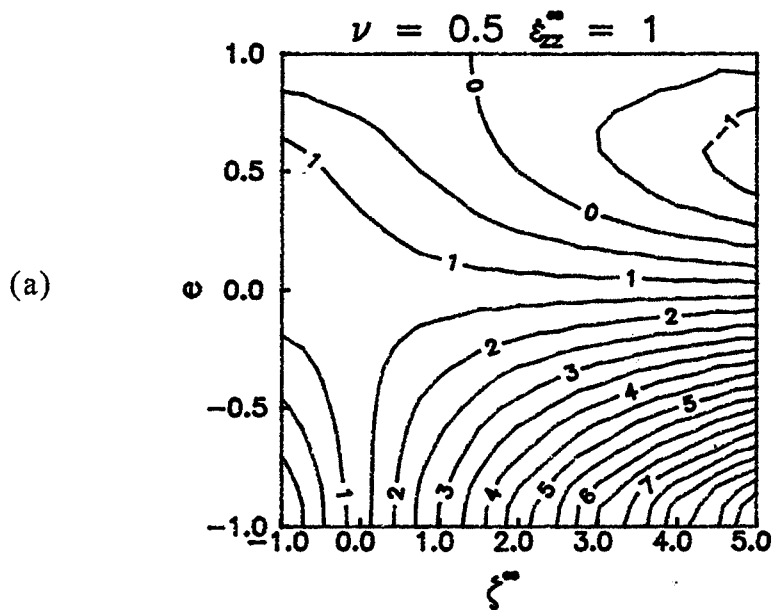
#### *\* Etude du changement de forme en fonction de $\varepsilon_{zz}^\infty$*

Sur la figure 10, l'évolution de  $e$  est portée en fonction de la déformation imposée pour une cavité initialement sphérique et pour différentes triaxialités. Quelle que soit la triaxialité, la compressibilité de la matrice ralentit le changement de forme. Le raisonnement précédent peut être reproduit: la matrice compressible absorbe une partie des déformations imposées, la cavité est moins sollicitée et tend moins rapidement vers sa forme asymptotique. On remarque aussi que plus la triaxialité est élevée, moins  $e$  augmente. Pour une triaxialité de 7,  $e$  tend vers une excentricité asymptotique proche de 0 : l'endommagement correspondant est volumique (cavités quasi sphériques).

Sur la figure 11a l'évolution de  $e$  est portée en fonction de  $\varepsilon_{zz}^\infty$  pour des cavités de formes initiales différentes. Pour  $\zeta^\infty = 7$ , les cavités d'excentricités quelconques et différentes de 1 ou -1 ont tendance à prendre toutes la même forme finale. Des cavités d'excentricités initiales comprises entre -0,6 et 0,6 ont une excentricité comprise entre -0,1 et 0,3 après une déformation globale  $\varepsilon_{zz}^\infty = 0,5$ . Elles évoluent donc vers une forme quasi sphérique, d'autant plus rapidement que la matrice est moins compressible. L'endommagement obtenu pour cette triaxialité est donc dû à la présence de cavités volumiques. Ceci correspond bien avec les observations expérimentales effectuées à partir d'essais d'impacts de plaques. L'excentricité asymptotique des cavités est donc un renseignement précieux, même pour un matériau compressible. Pour  $\zeta^\infty = -2$  (Figure 11b) les cavités évoluent vers deux formes radicalement opposées suivant leur excentricité initiale : soit un cylindre infini ( $e = 1$ ) soit un disque aplati ( $e = -1$ ). Elles s'approchent, à l'inverse du cas précédent, d'autant plus vite de leur forme finale que la matrice est compressible.

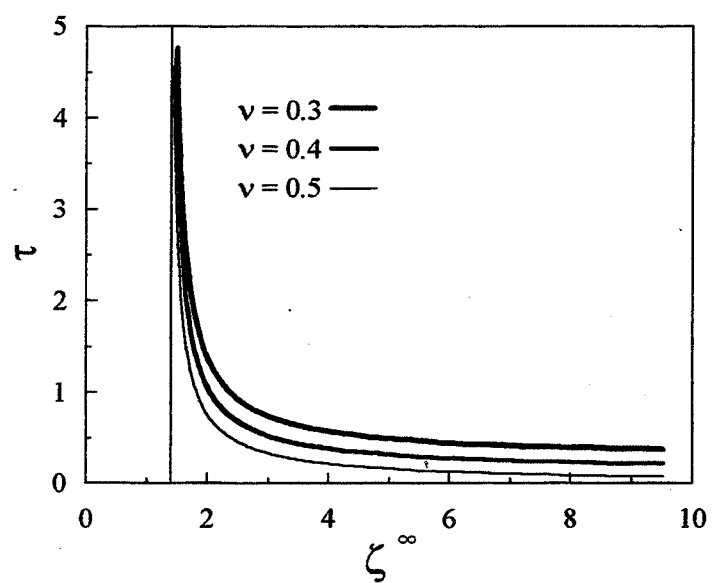


**Figure 11 :** Evolution de l'excentricité de cavités de formes initialement différentes (a) à haute triaxialité et (b) en compression ( $S > T$ ).

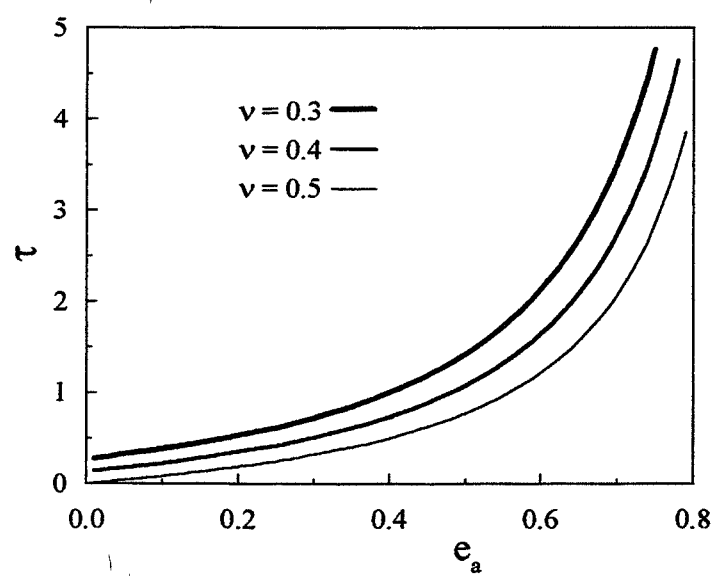


**Figure 12 :** Courbes d'isovaleurs de  $\varepsilon$  dans l'espace  $(e, \zeta^\infty)$ , dans une matrice  
(a) incompressible et (b) compressible ( $\nu = 0,3$ )

(a)



(b)



**Figure 13 :** Evolution du paramètre  $\tau$  en fonction de la triaxialité imposée (a) ou de l'excentricité asymptotique correspondante (b)

### \* Excentricité asymptotique

Les figures précédentes mettent en évidence l'existence d'une forme asymptotique des cavités pour un chargement donné. Celle-ci peut se calculer analytiquement : il s'agit de l'excentricité pour laquelle  $\dot{e}=0$ . Pour un chargement tel que  $S > T$ , outre les solutions  $e = 1$  et  $e = -1$ , la relation suivante entre l'excentricité asymptotique  $e_a$  et la triaxialité imposée est obtenue (se reporter à l'annexe I pour les notations):

$$3\zeta^\infty = \frac{16e_a}{3[1-Q_R(e_a)](1-e_a)^2 + 4e_a} \quad (43)$$

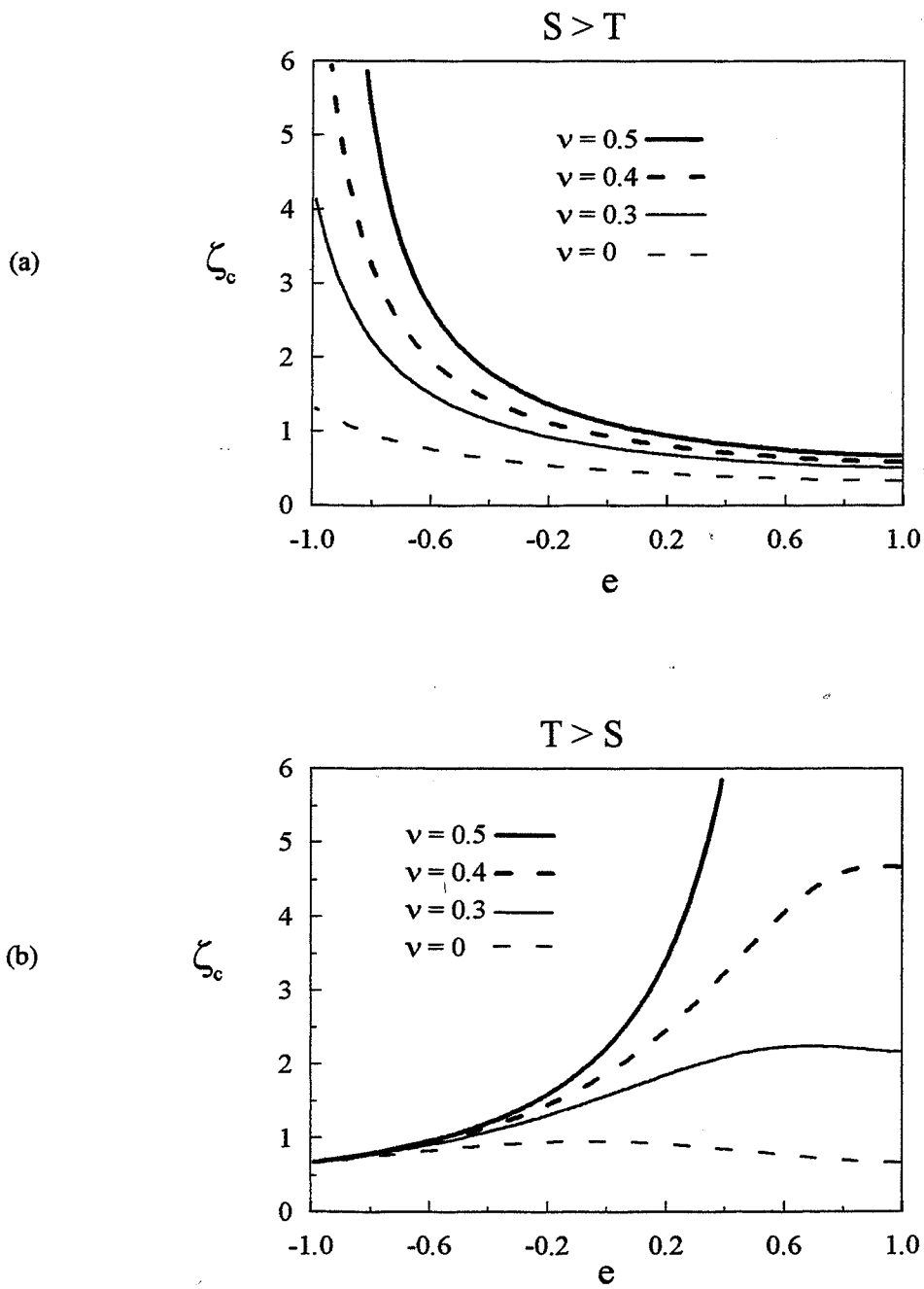
La relation (43) indique que l'excentricité asymptotique de la cavité est *indépendante* de la compressibilité de la matrice. La figure 12 présente des courbes d'isovaleurs de  $\dot{e}$  dans l'espace  $(\zeta^\infty, e)$ , avec  $S > T$ , dans le cas d'une matrice incompressible (12a) et compressible (12b) et pour une vitesse de déformation longitudinale unitaire. On remarque alors que si l'excentricité asymptotique est la même dans les deux cas, la valeur et la forme des courbes correspondant à  $\dot{e}$  non nulle sont différentes. Ainsi, une cavité placée dans une matrice compressible tendra moins vite vers sa forme asymptotique. Ces figures montrent d'autre part que, pour une triaxialité donnée et un chargement tel que  $S > T$ , la cavité pourra *s'allonger ou s'aplatir* en fonction de son excentricité initiale.

### \* Développement asymptotique

Intéressons nous au développement asymptotique de  $e$  au voisinage de  $e_a$ , afin d'obtenir une déformation  $\tau$  caractéristique de la rapidité d'une cavité à tendre vers sa forme finale. La forme suivante est recherchée :

$$e - e_a = \alpha \exp \left( - \left( \frac{\varepsilon_{zz}^\infty}{\tau} \right) \right) \quad (44)$$

La figure 13 présente  $\tau$  en fonction de  $e_a$  (ou de la triaxialité imposée, ces deux grandeurs étant liées par l'équation (43)) pour une triaxialité imposée positive et dans le cas  $S > T$ . Ces courbes mettent en évidence l'augmentation de  $\tau$  pour une diminution du coefficient de Poisson : la compressibilité de la matrice, pour les chargements considérés, ralentit l'évolution de l'excentricité vers  $e_a$ . De plus, plus la forme asymptotique est proche de la cavité sphérique,



**Figure 14.:** Evolution de la triaxialité critique en fonction de l'excentricité pour les deux types de chargement  $S > T$  (a) et  $T > S$  (b)

plus  $\tau$  est faible. L'asymptote  $\zeta^\infty = 4/3$  correspond à la triaxialité pour laquelle une solution différente de 1 et -1 apparaît pour l'équation  $\dot{e}=0$ . Pour  $e_a = 0$  ( $\zeta^\infty \rightarrow \infty$ ), la valeur obtenue est :

$$\tau = \frac{(1-2\nu)(7-5\nu)}{9(1+\nu)(1-\nu)} \quad (45)$$

$\tau$  s'annule donc pour une matrice incompressible et vaut 0,27 pour  $\nu = 0,3$ .

Cette grandeur permet de retrouver les résultats énoncés précédemment.  $\tau$  diminue lorsque la triaxialité augmente et lorsque le comportement de la matrice s'approche de l'incompressibilité : toute cavité tendra d'autant plus vite vers sa forme asymptotique dans ces conditions.

### III.4. Triaxialité critique

La triaxialité critique est la triaxialité au dessus de laquelle la cavité verra sa dimension radiale (resp. axiale) croître pour un chargement  $S > T$  (resp.  $T > S$ ). Si cette condition est vérifiée, il est sûr que la cavité *se détache* de l'inclusion qui lui a donné naissance. Cette valeur est un indicateur du domaine de validité du modèle car la modélisation utilisée ne tient pas compte de zones de contact entre la cavité et l'inclusion. Le comportement de la matrice est linéaire, la vitesse de déformation imposée intervient alors uniquement en tant que facteur multiplicatif. Le signe des vitesses  $\dot{a}$  et  $\dot{b}$  ne dépend que de la triaxialité à l'infini. La triaxialité critique correspond à  $\dot{b}=0$  (resp.  $\dot{a}=0$ ). Le résultat obtenu est le suivant (notations dans l'annexe I) :

$$\zeta_c = - \frac{16e(\bar{q}_0^2 Q_R + 4e)(\nu+1)}{3[\bar{q}_0^2 Q_R (8e(\nu-5) - 9\bar{q}_0^2) + 4e(8e(\nu-2) - 3\bar{q}_0^2)]} \quad (46)$$

La triaxialité critique est donc dépendante de la compressibilité de la matrice. La figure 14a présente les variations de la triaxialité critique en fonction de l'excentricité pour différents coefficients de Poisson et pour le cas de chargement  $S > T$ . Plus le matériau est compressible, plus la triaxialité critique diminue. En effet, pour un matériau incompressible, la diminution de section radiale (dans un plan perpendiculaire à l'axe de traction) doit compenser l'allongement dans la direction de traction. Plus le matériau est compressible, plus le lien entre ces deux déformations est faible. Comme pour un matériau homogène (sans cavité) de coefficient de Poisson nul, il n'existe aucun lien entre l'allongement dans la direction axiale et la déformation radiale,



la triaxialité "critique" est de  $1/3$  ( $T \geq 0$ ). Si la triaxialité critique obtenue pour  $v = 0$  est ici légèrement supérieure à  $1/3$  cela signifie que la cavité introduit une faible hétérogénéité.

L'influence de  $v$  est de moins en moins sensible quand  $e$  tend vers 1. En effet dans ce cas la cavité ne perturbe plus l'écoulement. Elle restera sous forme d'une aiguille allongée dans le sens de la traction pour tout chargement et quelle que soit la compressibilité. *D'autre part,  $\zeta_c$  est monotone décroissante en fonction de  $e$ . Ceci permet d'affirmer qu'au cours d'un essai de traction à  $\zeta$  donné supérieur à  $\zeta_c$  la condition  $\dot{b}=0$  est conservée.*

Pour un chargement  $T > S$ , les tendances sont différentes. Sur la figure 14b, on remarque que la courbe correspondant à  $v = 0,3$  est croissante puis décroissante. Dans un tel cas, il existe des chargements où la condition  $\dot{a} \geq 0$  bien que remplie au début de l'essai ne le sera pas tout au long de celui-ci : ainsi considérons par exemple une cavité d'excentricité initiale 0,95 dans une matrice de coefficient de Poisson 0,3 soumise à une triaxialité à l'infini de 2,2. L'excentricité de cette cavité va décroître tout en laissant croître  $a$ . Puis, pour  $e \approx 0,85$  la courbe limite de  $\zeta_c$  va être atteinte. A ce moment le demi-axe de longueur  $a$  va diminuer. La cavité aura alors tendance à recoller à l'inclusion.

Pour un chargement  $S > T$  :

- lorsque  $v = 0$ , l'influence de  $e$  sur  $\zeta_c$  est très faible car les déformations sont découplées.

- pour  $v \geq 0$ ,  $\zeta_c$  diminue quand  $e$  augmente. Pour  $e = 1$ , la perturbation n'a quasiment aucune influence vu le chargement considéré ; alors que pour  $e = -1$ , la perturbation est maximale. Pour le cas d'une fissure, la vitesse de déformation du demi-axe de longueur  $b$  est égale à la déformation appliquée à l'infini :  $\dot{b}/b = \dot{\epsilon}_{xx}^\infty$ .

Pour un chargement  $T > S$ , les évolutions sont inversées. Le raisonnement qualitatif précédent peut être appliqué. Notons qu'il est normal que les courbes de ces figures ne sont pas symétriques puisque le chargement  $S$  est uniquement axial ("unidimensionnel") alors que le chargement  $T$  est radial ("bidimensionnel").

L'hypothèse de croissance libre d'une cavité (indépendamment de l'inclusion lui ayant donné naissance) est d'autant plus valable que la matrice est plus compressible. Le domaine de validité du modèle croît lorsque  $e$  augmente pour  $S > T$  et diminue pour  $T > S$ . Pour des cavités sphériques ou

allongées, notre modèle est physiquement valide pour des triaxialités supérieures à 0,8. Une analyse plus précise du problème nécessiterait donc de prendre en compte le contact inclusion-matrice pour traiter les essais de traction uniaxiale ( $\zeta^\infty = 1/3$ ).

### III.5. Cartes d'isovaleurs de contrainte moyenne et de vitesse de déformation équivalente

Dans le but de mieux décrire l'écoulement autour de la cavité, des cartes d'isovaleurs de  $\sigma_m$  et de  $\dot{\epsilon}_{vm}$  normalisées par les valeurs correspondantes à l'infini ont été tracées pour deux valeurs de  $\nu$  (0,3 et 0,5), deux excentricités (0 et 0,5) et deux types de chargement ( $\zeta^\infty = 1/3$  et 7 ;  $\dot{\epsilon}_{zz}^\infty = 1$ ).

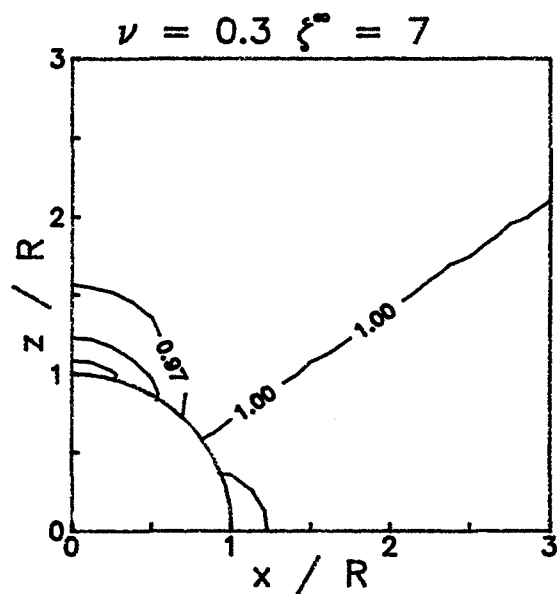
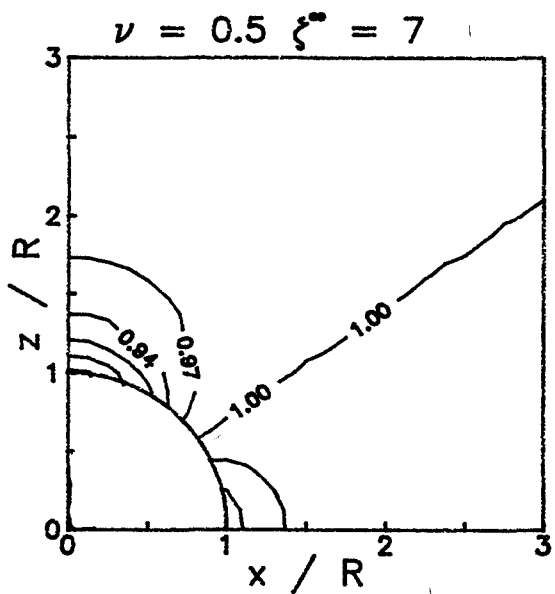
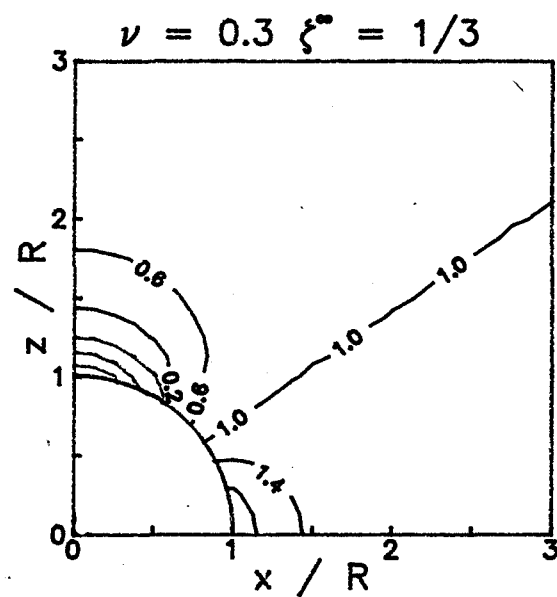
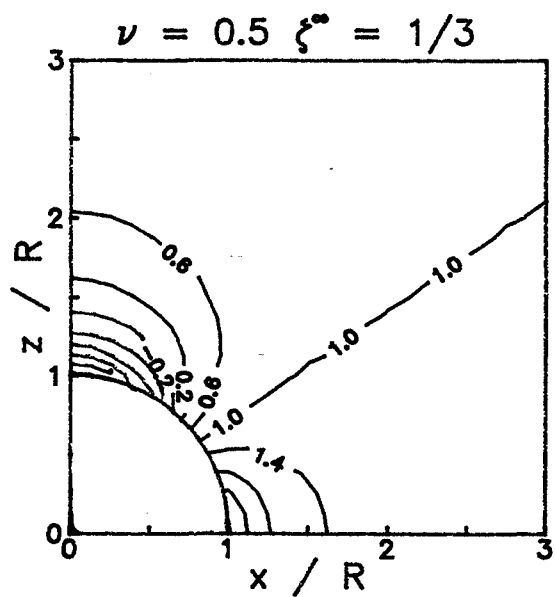
#### III.5.1. Champ de contrainte moyenne

##### *\* Influence du chargement*

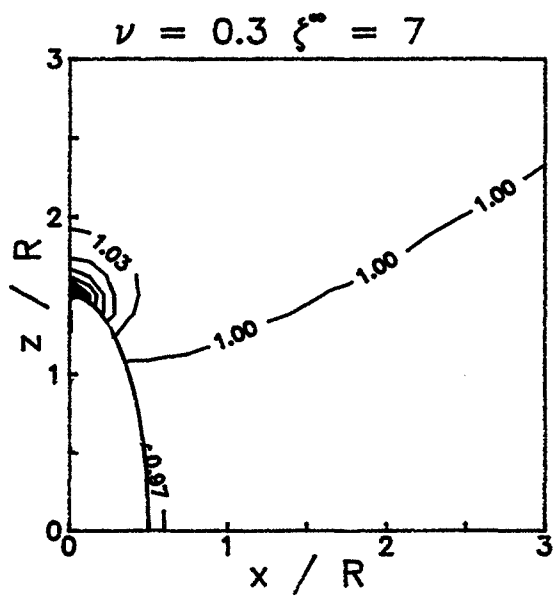
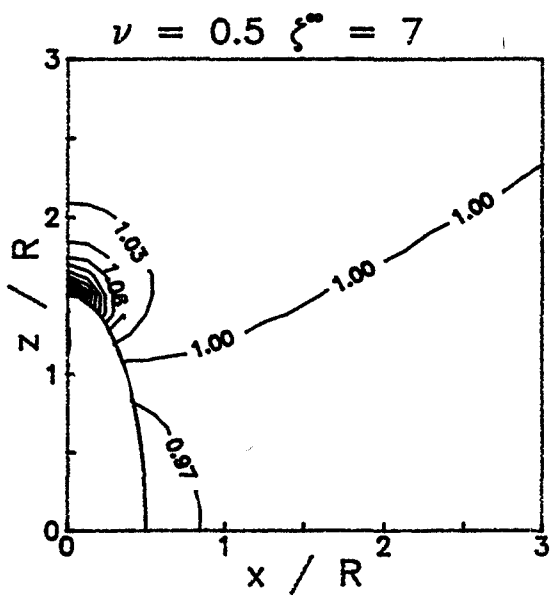
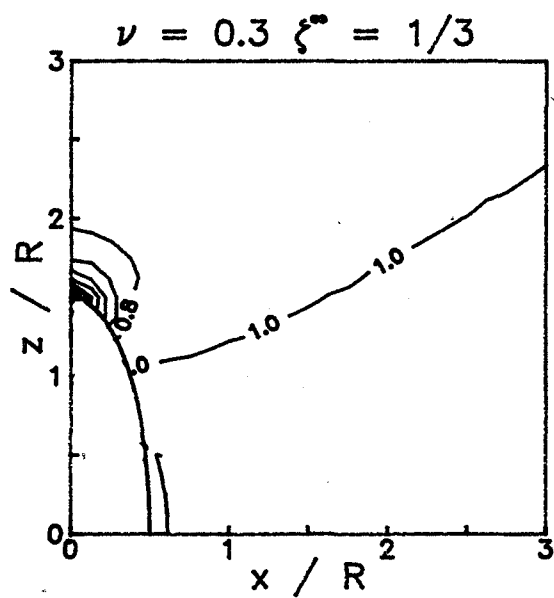
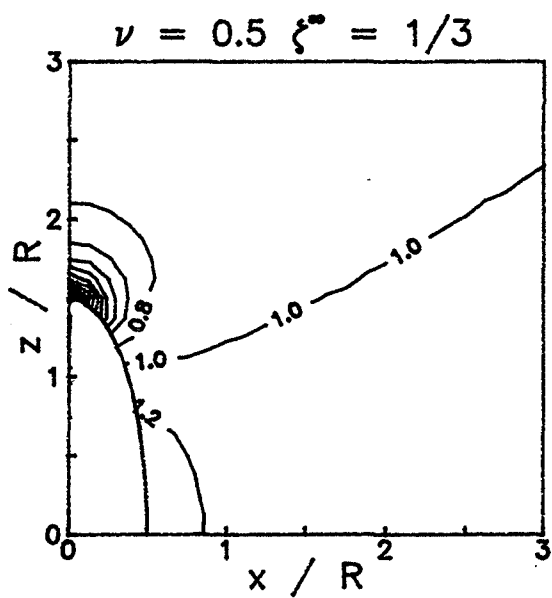
La forme des isovaleurs de contrainte moyenne autour d'une cavité sphérique (Figure 15) est peu affectée par la compressibilité ou la triaxialité imposée. Cependant, leurs valeurs sont sensiblement modifiées. La compressibilité de la matrice a pour effet de rendre les pics et creux de contrainte moyenne moins prononcés. L'importance de la triaxialité est plus marquée : à faible triaxialité, une zone de compression est observée au pôle de la cavité ; elle se transforme en une zone de traction (où la contrainte moyenne est cependant moins importante que sa valeur à l'infini) lorsque la triaxialité est élevée.

##### *\* Influence de la forme*

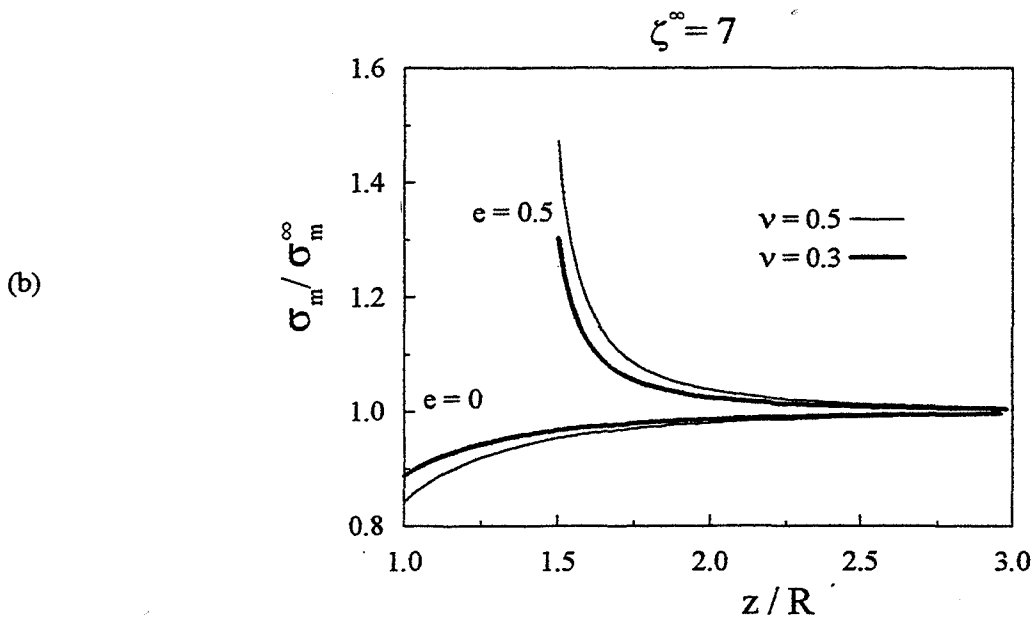
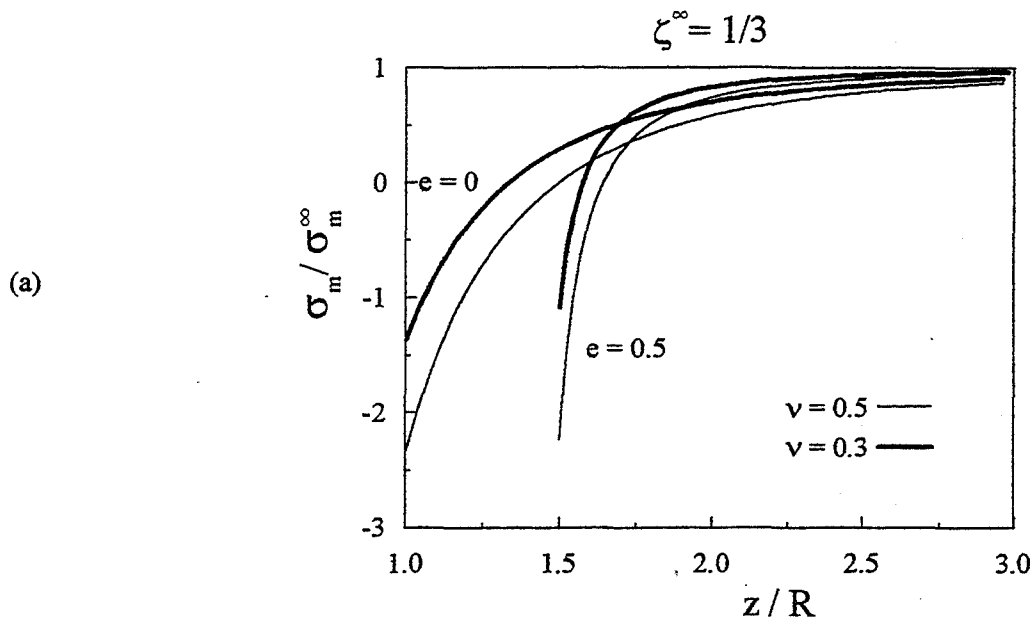
La figure 16 permet d'observer l'effet d'une cavité allongée sur la forme du champ de contrainte moyenne. Pour un essai de traction uniaxiale, la tendance est la même que pour une cavité sphérique : augmentation à l'équateur et déficit au pôle. A haute triaxialité, un changement de tendance apparaît : une concentration de contrainte moyenne est présente au pôle de la



**Figure 15 :** Courbes d'isovaleurs de contrainte moyenne autour d'une cavité sphérique



**Figure 16 :** Courbes d'isovaleurs de contrainte moyenne autour d'une cavité allongée ( $e = 0,5$ )



**Figure 17 :** Contrainte moyenne normalisée pour deux triaxialités 1/3 (a) et 7 (b) coupes à 90°

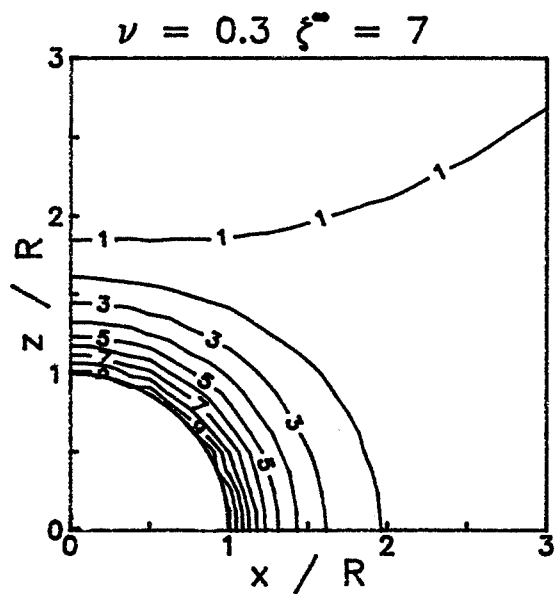
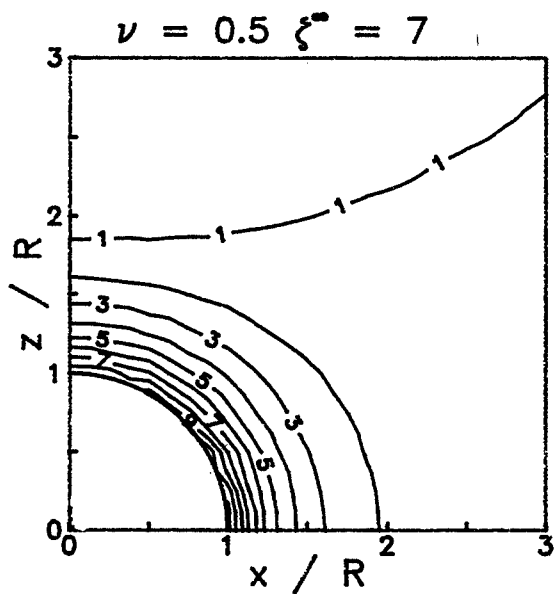
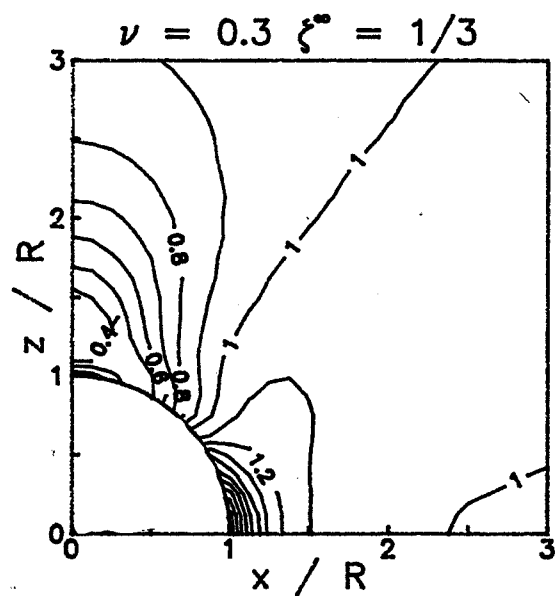
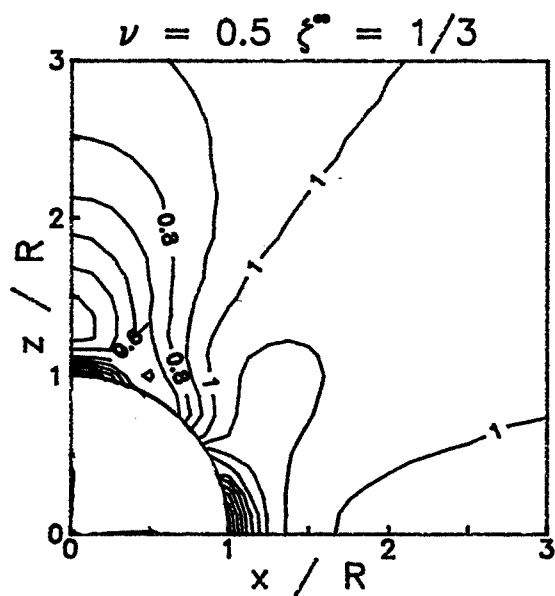
cavité. Les cavités de forme allongée sont donc plus nocives que les cavités sphériques à triaxialité élevée. En effet la concentration de traction hydrostatique qui se développe au voisinage de leur pôle peut favoriser le développement de micro-cavités, et donc un endommagement induit.

Pour mieux observer ces évolutions, des coupes le long de l'axe de symétrie ont été tracées sur la figure 17. Ces coupes sont plus précises que les courbes de niveau lorsqu'un pic (ou un creux) aigu est présent. Ces courbes montrent bien le changement de concavité en fonction de la forme de la cavité à haute triaxialité. Le long de l'axe de symétrie, la valeur de la contrainte moyenne à l'infini est atteinte très rapidement ( $z/R > 2,5$ ) quelle que soit la forme de la cavité, la triaxialité, et la compressibilité de la matrice. La perturbation de pression due à la cavité reste donc très localisée autour de celle-ci.

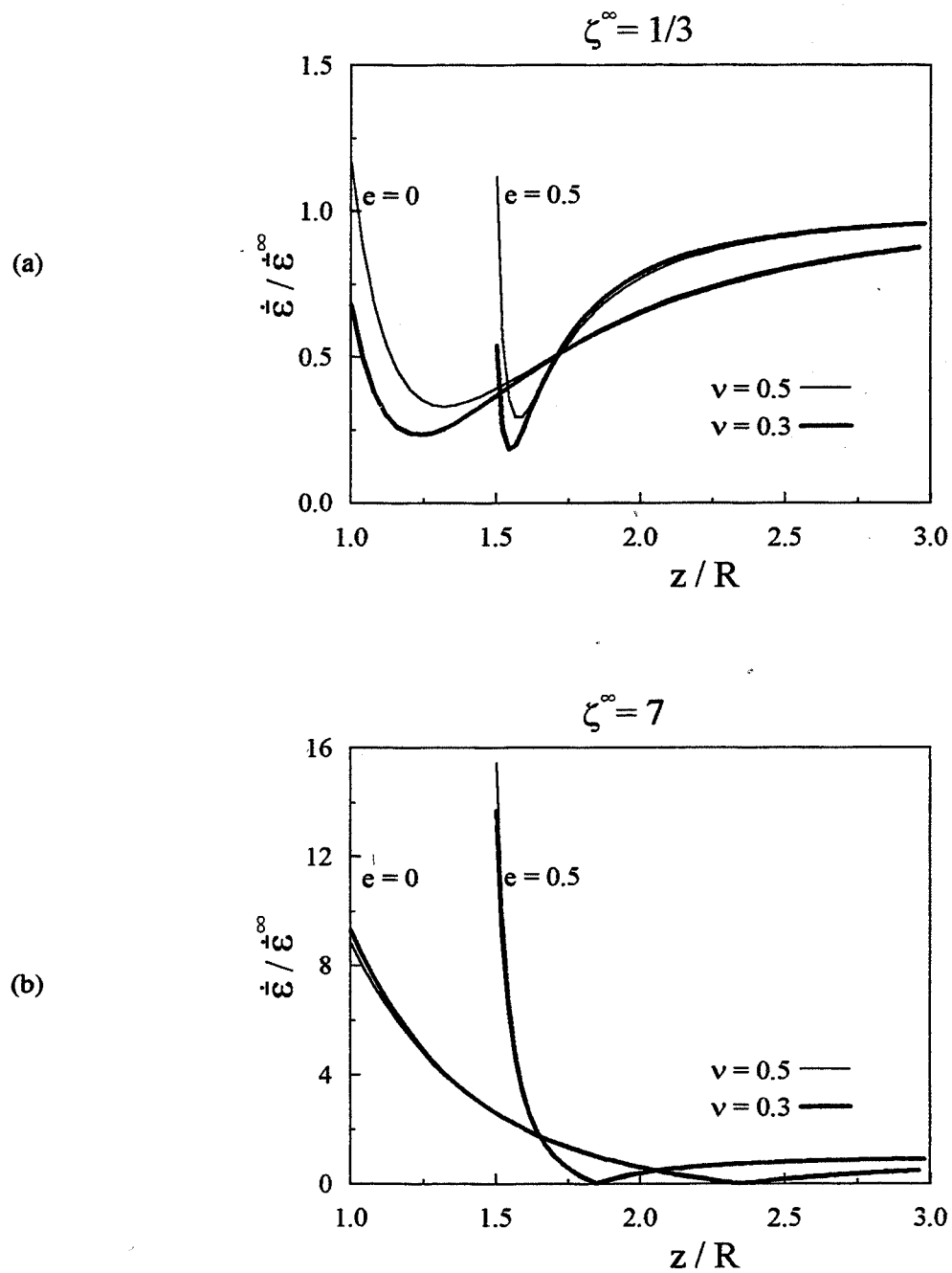
### III.5.2. Champ de vitesse de déformation équivalente de von Mises

Sur la figure 18, on remarque très bien la différence d'écoulement entre un chargement uniaxial et un chargement à triaxialité élevée. Pour un chargement se rapprochant du chargement sphérique, les courbes d'isovaleurs sont presque homothétiques à la cavité. En revanche, pour un chargement uniaxial des variations importantes de la vitesse de déformation sont présentes à la surface de la cavité : celle-ci, initialement sphérique, a tendance à s'allonger. Pour  $\zeta^\infty = 7$ , les vitesses de déformation équivalentes de von Mises au voisinage de la cavité augmentent d'un facteur 10. Ceci explique la croissance volumique beaucoup plus importante de la cavité à forte triaxialité.

Le creux de vitesse de déformation équivalente présent au pôle de la cavité à faible triaxialité s'éloigne de celle-ci lorsque la triaxialité augmente. Ce résultat est mis en évidence sur les coupes de la figure 19. Toutes les courbes présentées atteignent un minimum. Plus la triaxialité est élevée plus ce minimum s'éloigne de la cavité et plus sa valeur diminue. A haute triaxialité apparaît une valeur de  $z$  où la vitesse de déformation équivalente de von Mises s'annule. La contrainte équivalente de von Mises  $y$  est donc elle aussi nulle. La triaxialité locale atteint alors en ce point une valeur infinie, qui n'est nullement reliée à une concentration de contrainte moyenne. La triaxialité locale n'est donc pas un bon paramètre pour caractériser les possibilités d'endommagement

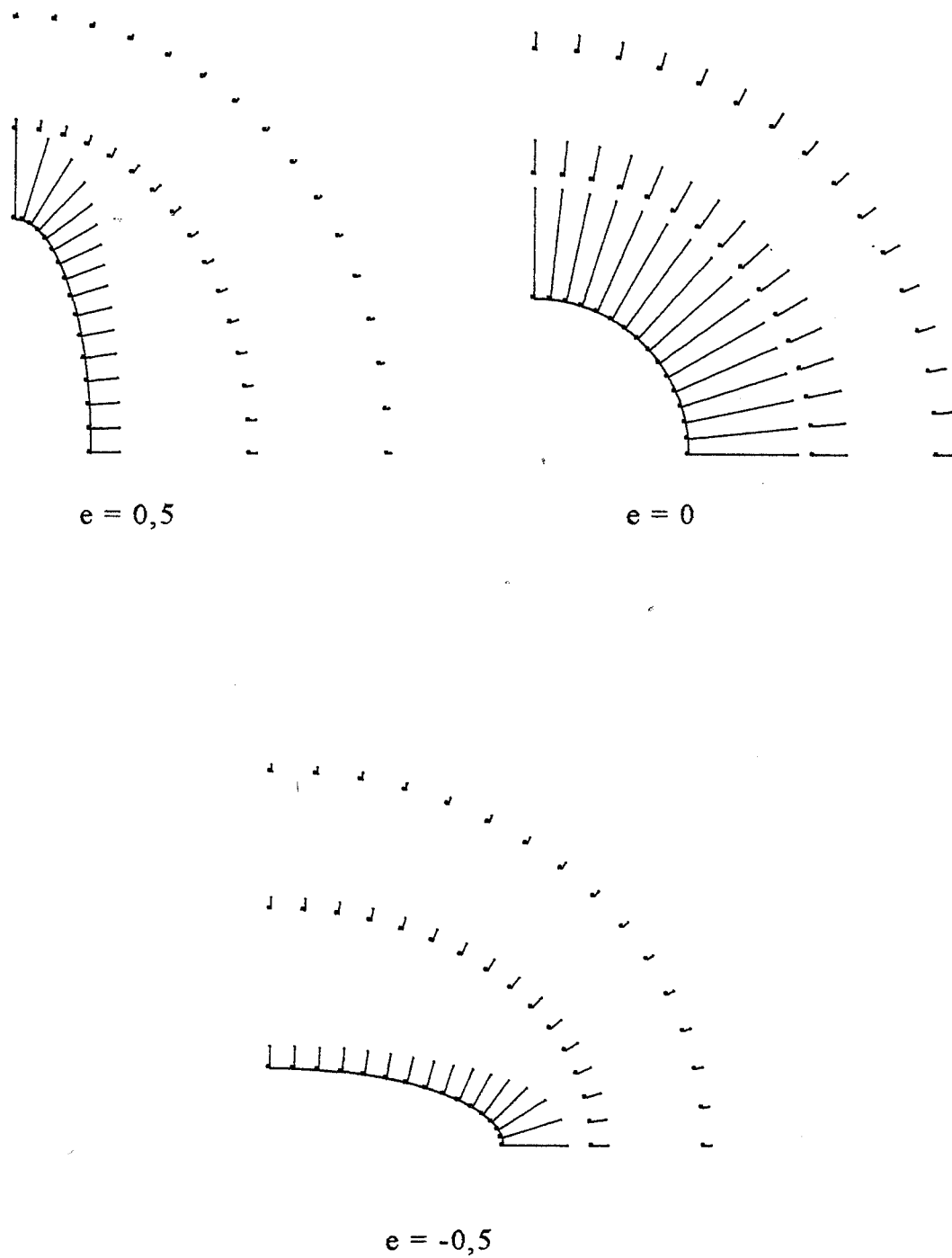


**Figure 18 :** Courbes d'isovaleurs de vitesse de déformation équivalente de von Mises autour d'une cavité sphérique



**Figure 19 :** Vitesse de déformation équivalente de von Mises normalisée pour deux triaxialités 1/3 (a) et 7 (b) : coupes à 90°





**Figure 20 :** Premier mode de vitesse (mode de croissance pure) pour trois excentricités  $e = 0,5$  ( $\lambda = 3$ ),  $e = 0$  ( $\lambda = 1$ ),  $e = -0,5$  ( $\lambda = 1/3$ )

secondaire, lorsque l'on étudie un comportement newtonien. Ceci justifie le choix des courbes iso-contrainte moyenne.

#### IV. Interprétation des modes de vitesse

Après une analyse des résultats concernant essentiellement la croissance d'une cavité dans une matrice endommagée, une étude plus approfondie des modes de vitesse de perturbation obtenus par la méthode des trois potentiels va maintenant être abordée.

ESHELBY [1957] a montré que dans une matrice linéaire soumise à un chargement homogène la solution exacte transforme une ellipse en une autre ellipse. Il est facile de montrer que les champs de vitesse obtenus, ainsi que le champ homogène à l'infini, ont chacun cette propriété.

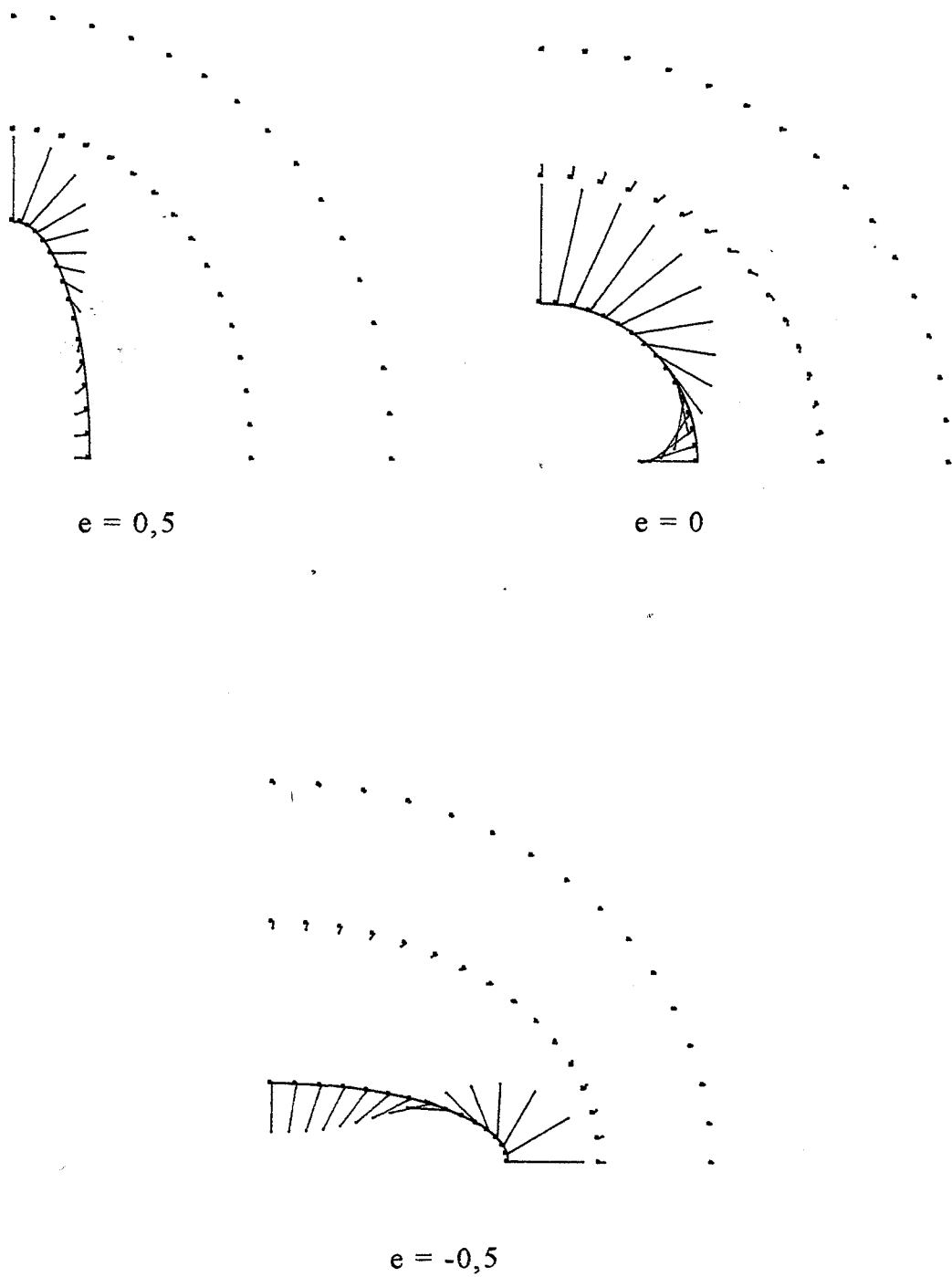
Le but de cette partie est de comprendre l'influence de la compressibilité de la matrice sur les différents modes de vitesse. Par construction, les modes 1 et 2 sont incompressibles, donc indépendants de  $v$  :

$$\vec{g}^1 = \vec{\text{grad}} \varphi^1 \text{ et } \vec{g}^2 = \vec{\text{grad}} \varphi^2$$

avec  $\Delta \varphi^1 = \Delta \varphi^2 = 0$

d'où  $\text{div } \vec{g}^1 = \text{div } \vec{g}^2 = 0$  (47)

Toutefois les amplitudes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  dépendent de la compressibilité de la matrice. Le mode 3 en revanche est intrinsèquement fonction de  $v$ . La méthode utilisée pour obtenir le champ exact entraîne que les trois modes de perturbation obtenus sont indépendants du chargement : ils forment une base des solutions. Ce sont leurs amplitudes qui en tiennent compte.



**Figure 21 :** Second mode de vitesse (mode de distorsion pure) pour trois excentricités  $e = 0,5$  ( $\lambda = 3$ ),  $e = 0$  ( $\lambda = 1$ ),  $e = -0,5$  ( $\lambda = 1/3$ )

#### IV.1. Mode 1

$$\vec{g}^1 = \frac{1}{2G} \vec{\text{grad}}[Q_0(s)]$$

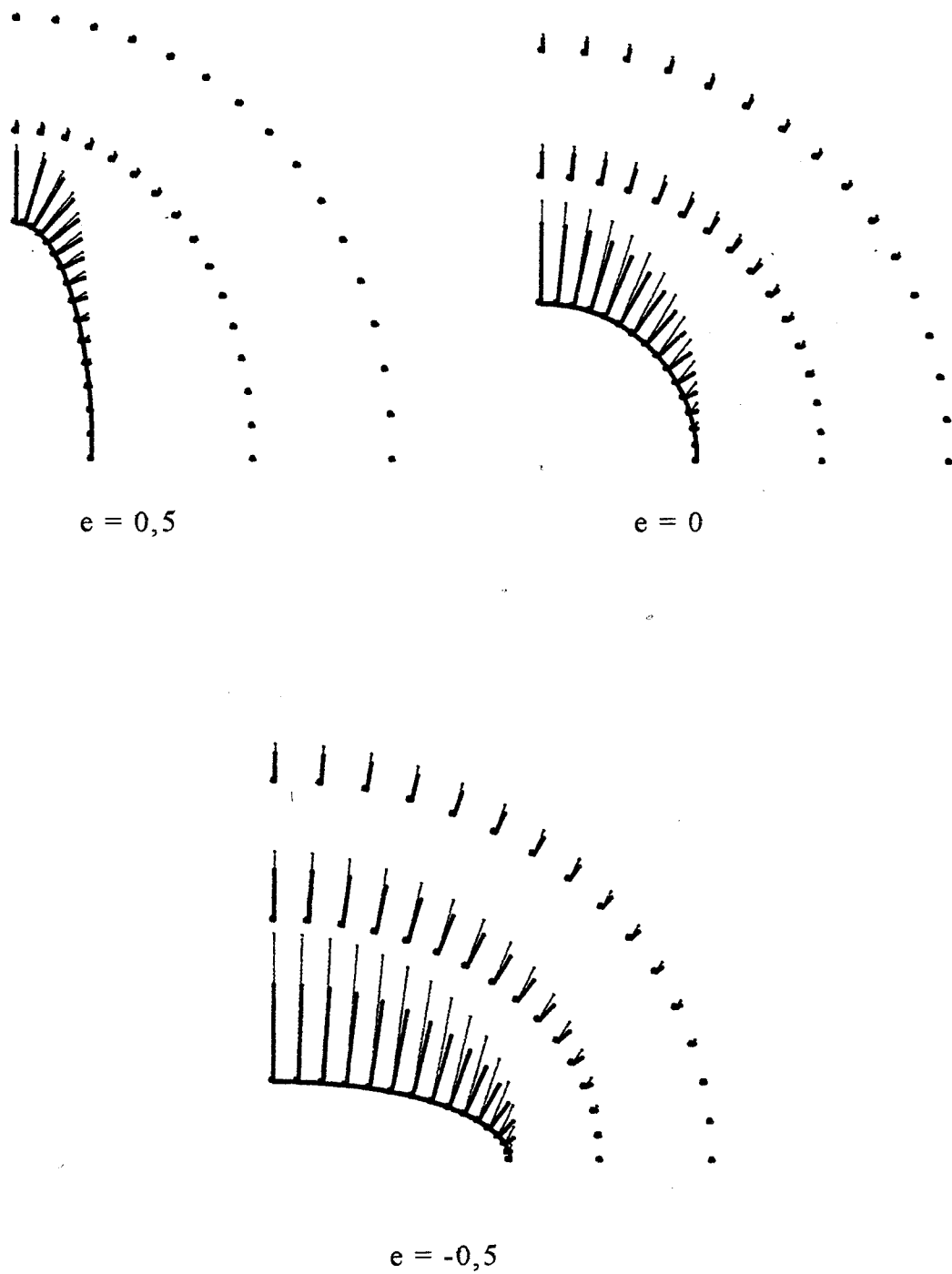
Ce mode de vitesse est orthogonal à la surface de la cavité (car  $g_t^1 = 0$ ) et aux lignes  $s = \text{cste}$ . La figure 20 montre l'allure du mode 1 pour trois excentricités différentes : 0,5 , 0 et -0,5. Le calcul de la contribution de ce mode à la vitesse de changement de forme donne  $\dot{e}^1 = 0$ . Le premier mode de vitesse de perturbation est donc un mode de croissance homothétique, sans distorsion de la cavité. Le vecteur vitesse est toujours plus important à la pointe de la cavité.

#### IV.2. Mode 2

$$\vec{g}^2 = \frac{1}{2G} \vec{\text{grad}}[Q_2(s)P_2(t)]$$

Le calcul de la vitesse de croissance volumique due à ce deuxième mode montre que c'est un champ de distorsion pure. En incompressible, KLÖCKER [1992] a montré que l'effet du mode 2 est d'annuler le champ à l'infini sur la surface de la cavité. Cependant, cette propriété disparaît lorsque la matrice s'endommage et devient compressible.

Agissant seul, le mode 2 déforme fortement la cavité (Figure 21) tout en gardant son volume constant. Ceci a amené, dans le passé, de nombreux auteurs à considérer ce champ comme mode de distorsion unique dans les différentes approches variationnelles proposées. Ce raisonnement montre à quel point il est important de connaître une solution exacte dans des cas particuliers avant d'aborder une approche qualitative.



**Figure 22 :** Troisième mode de vitesse (mode mixte) pour trois excentricités  $e = 0,5$  ( $\lambda = 3$ ),  $e = 0$  ( $\lambda = 1$ ),  $e = -0,5$  ( $\lambda = 1/3$ ) dans une matrice compressible ( $v = 0,3$ ) : trait fin et incompressible : trait gras

### IV.3. Mode 3

$$\begin{aligned}\bar{g}^3 &= \frac{1}{2G} \left[ z \vec{\text{grad}}[Q_1(s)P_1(t)] - \frac{7+3\kappa/G}{1+3\kappa/G} Q_1(s)P_1(t) \bar{e}_z \right] \\ &= \frac{1}{2G} \left[ z \vec{\text{grad}}[Q_1(s)P_1(t)] - (3-4\nu) Q_1(s)P_1(t) \bar{e}_z \right]\end{aligned}$$

A la différence des deux modes précédents, ce troisième mode de vitesse voit son *orientation* influencée par la compressibilité de la matrice. Ce mode est mixte : il agit à la fois sur le volume et sur la forme de la cavité.

Dans une matrice incompressible, il est orthogonal à la cavité et aux surfaces  $s = \text{cste}$  (la composante tangentielle étant alors nulle). Seul ce mode induit alors un changement de forme, car à la surface de la cavité les composantes normales du mode 2 et du champ à l'infini s'annulent. L'amplitude du mode 3 s'annule donc sous un chargement hydrostatique et pour une cavité sphérique. Il amène une cavité initialement non sphérique vers cette forme.

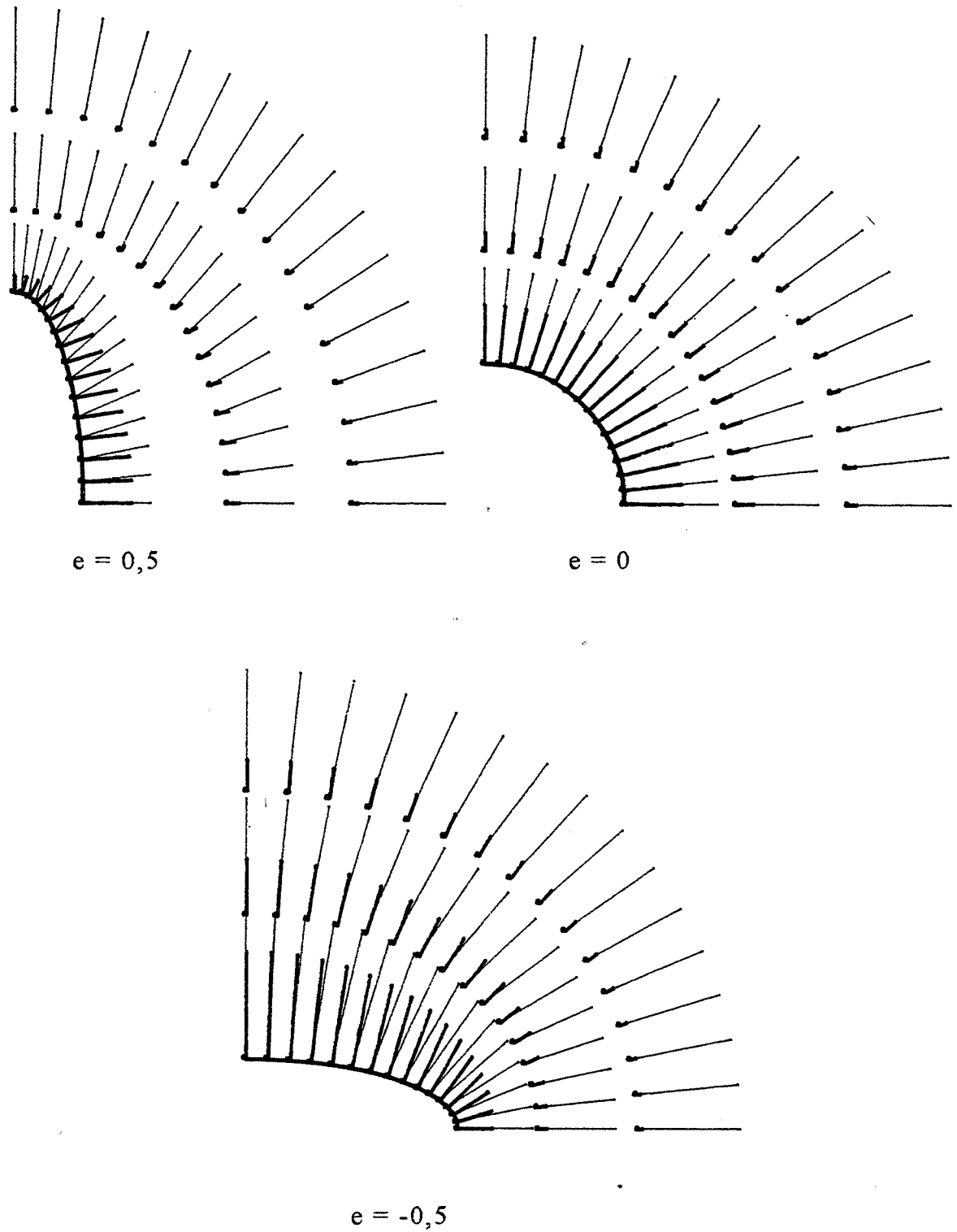
L'allure spatiale de ce mode est représentée en figure 22 pour différentes valeurs du coefficient de Poisson (0,3 et 0,5). Quelle que soit la forme de la cavité, le vecteur vitesse le plus important est toujours situé au pôle de celle-ci ( $\bar{g}^3$  s'annule à l'équateur). La compressibilité de la matrice agit sur l'intensité du champ ainsi que sur sa direction. La déviation angulaire du champ de vitesse est de même signe quel que soit celui de l'excentricité. D'autre part, l'intensité du champ est plus importante en compressible qu'en incompressible. La déviation angulaire de ce mode provient du fait que suivant la compressibilité du matériau le terme sphérique prend plus ou moins d'importance. En effet, le troisième mode peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{g}^3 = \bar{g}^3 + (1-2\nu) \bar{g}^4 \quad (48)$$

avec

$$\text{div}[\bar{g}^3] = 0$$

$\bar{g}^3$  correspond donc au mode de vitesse obtenu par KLÖCKER [1991] lorsque la matrice est incompressible. Le terme  $\bar{g}^4$  n'existe que dans une matrice compressible. Dans la seconde partie, où on se fonde sur les modes obtenus en linéaire pour appliquer un principe variationnel, ce mode 3 sera séparé en deux modes distincts.



**Figure 23 :** Champ total sous un chargement hydrostatique ( $S = T$ ) pour trois excentricités  $e = 0,5$  ( $\lambda = 3$ ),  $e = 0$  ( $\lambda = 1$ ),  $e = -0,5$  ( $\lambda = 1/3$ ) dans une matrice compressible ( $\nu = 0,3$ ) : trait fin et incompressible : trait gras

Nous avons vu précédemment que le mode 3 agit tant sur le volume que sur la forme de la cavité. Les deux "modes" créés artificiellement  $\bar{g}^3$  et  $\bar{g}^4$  agissent eux aussi sur l'ensemble des paramètres géométriques.

#### IV.4. Champ total

Les figures suivantes montrent l'influence de la compressibilité de la matrice sur le champ total pour différents chargements.

##### \* *Chargement sphérique* (Figure 23)

Pour une cavité sphérique, seul le mode 1 correspondant à une croissance homothétique de la cavité a une amplitude non nulle. Le champ total est alors radial et on retrouve les résultats donnés par GOODIER [1933] :

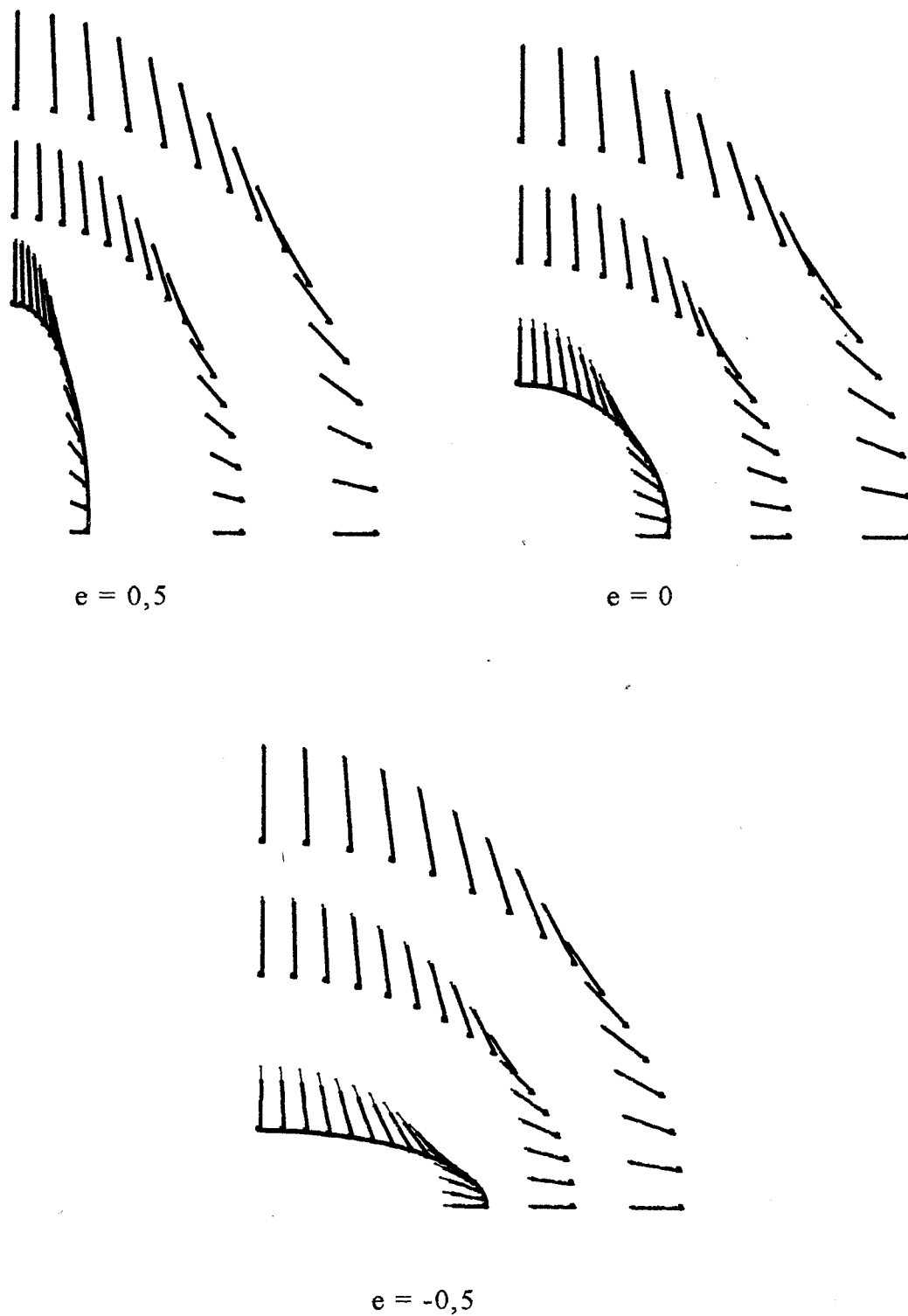
$$\dot{u}_r = \left( \frac{R^3}{2r^2} + \frac{1-2\nu}{1+\nu} r \right) \frac{\sigma_m^\infty}{2G} \quad (50)$$

Notons que dans le cas incompressible le champ à l'infini s'annule nécessairement pour respecter l'incompressibilité globale. Ceci montre d'ailleurs une limite sévère aux modèles fondés sur une matrice infinie. Le champ de vitesses s'annule en incompressible à l'infini et tend vers l'infini en compressible. Pour les cavités non sphériques, on observe une déviation angulaire qui change de signe avec l'excentricité. Celle-ci est plus importante pour les excentricités positives (cavités allongées).

##### \* *Chargement purement déviatorique* (Figure 24)

Pour ce cas de chargement, l'influence du coefficient de Poisson sur le champ de vitesses est très faible. La compressibilité de la matrice n'a donc pratiquement pas d'influence sur le champ local si le chargement à l'infini est à divergence nulle. Quelle que soit la forme de la cavité, l'écoulement de la matrice la force à s'allonger suivant l'axe longitudinal (sa forme asymptotique est un cylindre).





**Figure 24 :** Champ total sous un chargement purement déviatorique ( $T = -S/2$ ) pour trois excentricités  $e = 0,5$  ( $\lambda = 3$ ),  $e = 0$  ( $\lambda = 1$ ),  $e = -0,5$  ( $\lambda = 1/3$ ) dans une matrice compressible ( $\nu = 0,3$ ) : trait fin et incompressible : trait gras

#### IV.5. Comparaison avec la solution proposée par LEE et MEAR pour une matrice incompressible

En 1992, LEE et MEAR ont proposé la solution exacte du champ de vitesse dans une matrice *incompressible* autour d'une cavité ellipsoïdale. Les auteurs présentent leurs résultats à l'aide de trois modes de vitesse dont un seul est un mode de croissance volumique pure et les deux autres des modes de distorsion pure. En ajoutant un suffixe LM pour les mode de LEE et MEAR, la comparaison avec notre décomposition donne en incompressible :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{g}_{LM}^1 \leftrightarrow \bar{g}^1 \Rightarrow \dot{e}_{LM}^1 = 0 \\ \bar{g}_{LM}^2 \leftrightarrow \bar{g}^2 \Rightarrow \dot{v}_{LM}^2 = 0 \\ \bar{g}_{LM}^3 \leftrightarrow \frac{(3t^2 - 1)}{3} \bar{g}^1 \Rightarrow \dot{v}_{LM}^3 = 0 \end{array} \right. \quad (50)$$

Ceci est possible car, en incompressible, notre mode 3 est proportionnel à  $t^2 \bar{g}^1$ , et peut se décomposer en  $\frac{(3t^2 - 1)}{3} \bar{g}^1 + \frac{\bar{g}^1}{3}$ . Lorsque le comportement considéré est compressible, il n'est plus possible d'effectuer cette décomposition sans faire intervenir les amplitudes et la compressibilité de la matrice. On peut tout au plus décomposer le mode 3, de la même façon que ci-dessus, en une partie agissant uniquement sur le volume et une partie agissant uniquement sur l'excentricité. Ces deux parties sont toutefois proportionnelles à la *même* amplitude.

## VI. Conclusion

Dans ce chapitre, les champs de contrainte et de vitesse de déformation exacts autour d'une cavité ellipsoïdale de révolution dans une matrice viscoplastique linéaire compressible ont été calculés. Ceci constitue donc une extension du travail effectué par KLÖCKER [1991] dans le cas d'un matériau viscoplastique newtonien. Les principaux résultats observés sont les suivants :

1) La solution analytique a mis en évidence 3 modes de perturbation dont un seul dépend explicitement de la compressibilité de la matrice. En revanche, les amplitudes des modes dépendent toutes trois de celle-ci.

2) La triaxialité critique diminue si  $v$  diminue. Celle-ci est une frontière du domaine de validité du modèle présenté. Elle assure en effet que lors du chargement, la cavité ne risque pas de reprendre contact avec l'inclusion qui lui a donné naissance.

3) La forme asymptotique de la cavité est *indépendante* du caractère compressible de la matrice. Cependant la vitesse pour atteindre cette forme finale en dépend fortement. A haute triaxialité, on montre que des cavités de formes initiales variées sont toutes quasi sphériques après une déformation axiale d'environ 0,5, quelle que soit la compressibilité de la matrice.

4) Les effets de la compressibilité sur la croissance d'une cavité sont liés à la déformation de référence. Si la croissance volumique est étudiée en fonction de la déformation axiale à l'infini, deux cas sont observés : la compressibilité est stabilisante à haute triaxialité, mais déstabilisante à faible triaxialité.

5) La compressibilité de la matrice a peu d'influence sur la distribution des grandeurs mécaniques dans la matrice. En revanche, son influence est importante sur la cinématique de croissance de la cavité.

6) La triaxialité locale des contraintes ne semble pas un bon paramètre lors de l'étude d'un comportement viscoplastique. En effet, la présence de "zones" ou de "points" morts définis par  $\dot{\epsilon}_{vm} = 0$ , entraîne un taux de triaxialité des contraintes infini nullement lié à une concentration de traction hydrostatique.

## **DEUXIEME CHAPITRE**

**CROISSANCE D'UNE CAVITE ELLIPSOIDALE DE REVOLUTION  
DANS UNE MATRICE NON LINEAIRE COMPRESSIBLE**

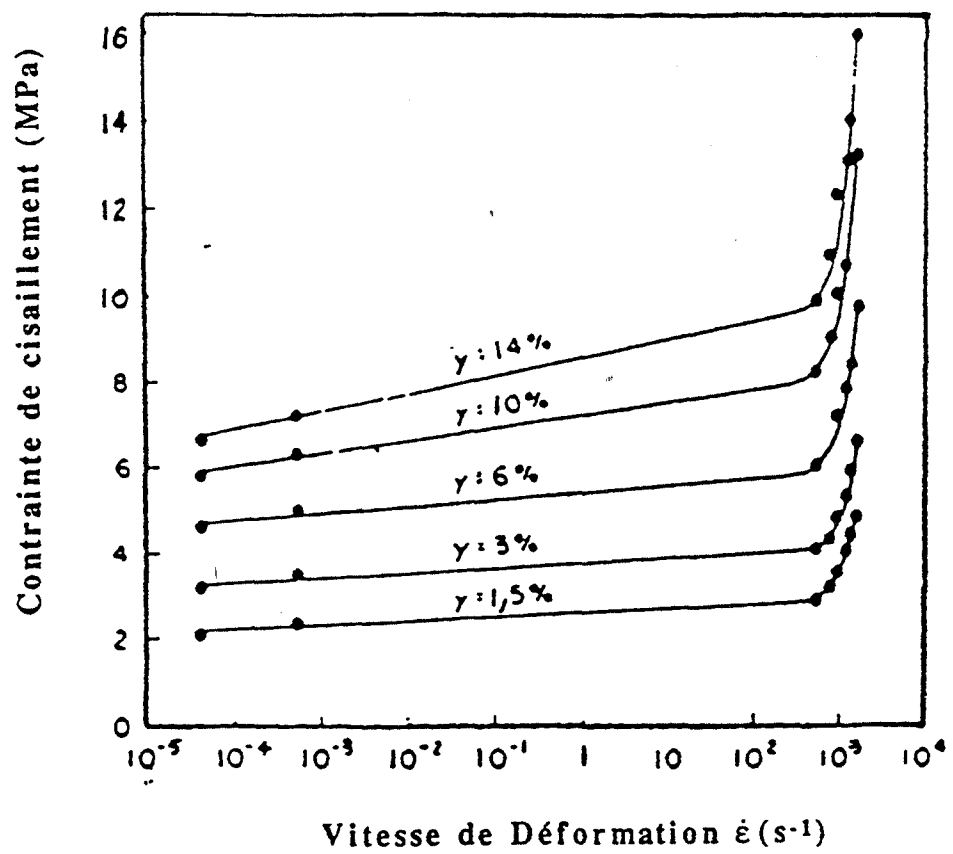


## CHAPITRE II

### CROISSANCE D'UNE CAVITE ELLIPSOIDALE DE REVOLUTION

#### DANS UNE MATRICE NON LINEAIRE COMPRESSIBLE

I. INTRODUCTION - SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE .....	35
I.1. Lois de comportement étudiées .....	35
I.2. Cavité isolée dans une matrice incompressible infinie .....	40
I.2.1. Cavité cylindrique dans une matrice parfaitement plastique .....	
I.2.2. Cavité sphérique dans une matrice parfaitement plastique .....	40
I.2.3. Cavité sphérique dans une matrice pseudoplastique .....	42
I.2.4. Cavité ellipsoïdale de révolution dans une matrice non linéaire .....	43
I.2.5. Conclusion .....	44
II. METHODE DE CALCUL .....	45
II.1. Présentation du problème .....	45
II.2. Principe variationnel utilisé .....	46
II.3. Formes des champs de vitesse adoptées .....	48
III. ANALYSE DES RESULTATS .....	50
III.1. Comparaison des solutions obtenues .....	50
III.2. Comportement pseudoplastique compressible .....	51
III.2.1. Croissance volumique de la cavité .....	51
III.2.2. Evolution de l'excentricité .....	53
III.2.3. Etude du champ de contrainte moyenne autour de la cavité .....	54
III.3. Comportement linéaire avec seuil compressible .....	56
III.3.1. Croissance volumique de la cavité .....	58
III.3.2. Evolution de l'excentricité .....	58
III.3.3. Courbes isovaleurs du coefficient de sensibilité à la vitesse .....	59
III.4. Comparaison des deux comportements étudiés .....	61
IV. CONCLUSION .....	62



**Figure 1 :** Contrainte d'écoulement en fonction de la vitesse de déformation pour de l'aluminium monocristallin (CHIEM, DUFFY [1983])

## I. Introduction - Synthèse bibliographique

Le chapitre précédent a permis d'étudier l'influence de la compressibilité d'une matrice newtonienne endommagée sur la croissance d'une cavité isolée. Un tel comportement viscoplastique linéaire peut s'appliquer en première approximation au cas des métaux déformés à haute température et particulièrement des alliages superplastiques. Cependant, lors de la mise en forme, la plupart des métaux sont caractérisés par une relation non linéaire entre la contrainte et la vitesse de déformation équivalentes de von Mises. Du fait de cette non linéarité, seuls certains problèmes de haute symétrie peuvent être abordés analytiquement ; il faut donc en général avoir recours à des méthodes numériques (éléments finis) ou approchées utilisant un principe variationnel.

### I.1. Lois de comportement étudiées

Au cours de la déformation des alliages métalliques, de nombreux mécanismes microstructuraux - écrouissage, restauration, recristallisations statique et dynamique - peuvent être mis en jeu. Il est alors très difficile de relier ces processus complexes au comportement macroscopique du matériau. C'est pourquoi nous ne considérons dans la suite que des lois de comportement empiriques simples, mais néanmoins fréquemment observées lors de la caractérisation de nombreux matériaux. Les expériences ont montré qu'il est nécessaire de distinguer deux types de comportement liés aux domaines de vitesses de déformation considérés. Le domaine des faibles vitesses de déformation ou *quasistatique* ( $\dot{\epsilon}_{vm} < 1 \text{ s}^{-1}$ ) se caractérise par des déformations homogènes (avant localisation de l'endommagement) et une température supposée constante au cours de l'essai. Le domaine des grandes vitesses de déformation ou *dynamique* ( $\dot{\epsilon}_{vm} > 100 \text{ s}^{-1}$ ) se distingue par une déformation hétérogène due à la propagation de l'onde de déformation et une influence non négligeable des effets d'inertie. La figure 1 montre le changement de comportement dû aux grandes vitesses de déformation sur de l'aluminium monocristallin : aux faibles vitesses de déformation, la contrainte est presque



indépendante de  $\dot{\bar{\epsilon}}_{vm}$  (m très faible). Puis un changement net apparaît sur la courbe, la sensibilité à la vitesse devenant très importante.

D'autre part, les expériences ou les modélisations numériques ont montré que l'écroutissage a pour effet de diminuer la croissance des cavités (GILORMINI, LICHT et SUQUET [1988]). Dans la suite, nous négligerons ce phénomène, bien qu'il soit possible d'intégrer numériquement une loi d'écroutissage dans le modèle proposé.

### \* Comportement pseudoplastique

Les essais effectués aux faibles vitesses de déformation ont permis de mettre en évidence un comportement en loi puissance ou *pseudoplastique* que l'on peut écrire :

$$\bar{\sigma}_{vm} = k_0 \bar{\epsilon}_{vm}^n \dot{\bar{\epsilon}}_{vm}^m \quad (1)$$

où  $\bar{\epsilon}_{vm} = \int_0^t \dot{\bar{\epsilon}}_{vm} dt$  est la déformation équivalente de von Mises, n le coefficient d'écroutissage et m le coefficient de sensibilité à la vitesse dont la définition plus générale est :

$$m = \left. \frac{\partial \ln \bar{\sigma}_{vm}}{\partial \ln \dot{\bar{\epsilon}}_{vm}} \right|_{\bar{\epsilon}_{vm}} \quad (2)$$

Dans le cas du cuivre, les valeurs classiquement admises sont  $n = 0,49$  ;  $m = 0,01$  à température ambiante et  $m = 0,1$  à  $500^\circ\text{C}$  ( $T / T_f \approx 0,46$ ).

### \* Comportement linéaire avec seuil

De nombreuses études (REGAZZONI [1983] ; GIANNOTTA [1986]) ont mis en évidence l'existence d'une loi de comportement linéaire avec seuil dans le domaine dynamique :

$$\bar{\sigma}_{vm} = \sigma_0(\bar{\epsilon}_{vm}) + \beta(\bar{\epsilon}_{vm}) \dot{\bar{\epsilon}}_{vm} \quad (3)$$

Cette loi de comportement entraîne cependant une relation non linéaire entre le tenseur déviateur des contraintes et le tenseur des vitesses de déformation ; en effet, la loi de normalité entraîne alors :

$$s = \frac{2}{3} \left( \frac{\sigma_0}{\dot{\epsilon}_{vm}} + \beta \right) \dot{\epsilon} \quad (4)$$

Le coefficient de sensibilité à la vitesse vaut :

$$m = \frac{\beta \dot{\epsilon}_{vm}}{\sigma_0 + \beta \dot{\epsilon}_{vm}} \quad (5)$$

m est donc fonction croissante de la vitesse de déformation ( $m = 0,074$  à  $10^3 \text{ s}^{-1}$  et  $m = 0,89$  à  $10^5 \text{ s}^{-1}$  dans le cas du cuivre).

En 1960, MASON a justifié du point de vue théorique une loi de comportement linéaire avec seuil. Cet auteur a étudié les différents mécanismes microscopiques pouvant influencer la valeur de la contrainte d'écoulement. Dans le domaine dynamique, les phénomènes de frottement visqueux agissant sur les dislocations deviennent prépondérants. A basse température, les frottements sont dus aux gaz d'électrons, à température ambiante ou élevée aux phonons. L'analyse de MASON est la suivante : dans un polycristal la vitesse de déformation plastique s'écrit :

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{\bar{M}} \rho_m b v \quad (6)$$

avec  $\bar{M}$  facteur de Taylor (de l'ordre de 3 pour un essai de traction uniaxiale)

$\rho_m$  densité de dislocations mobiles

b vecteur de Burgers

v vitesse de déplacement des dislocations

La présence du frottement visqueux entraîne la relation suivante entre la contrainte appliquée et la vitesse de déplacement des dislocations (Figure 2) :

$$(\tau - \tau(x)) b = B v \quad (7)$$

avec B coefficient de frottement visqueux

$\tau$  contrainte appliquée

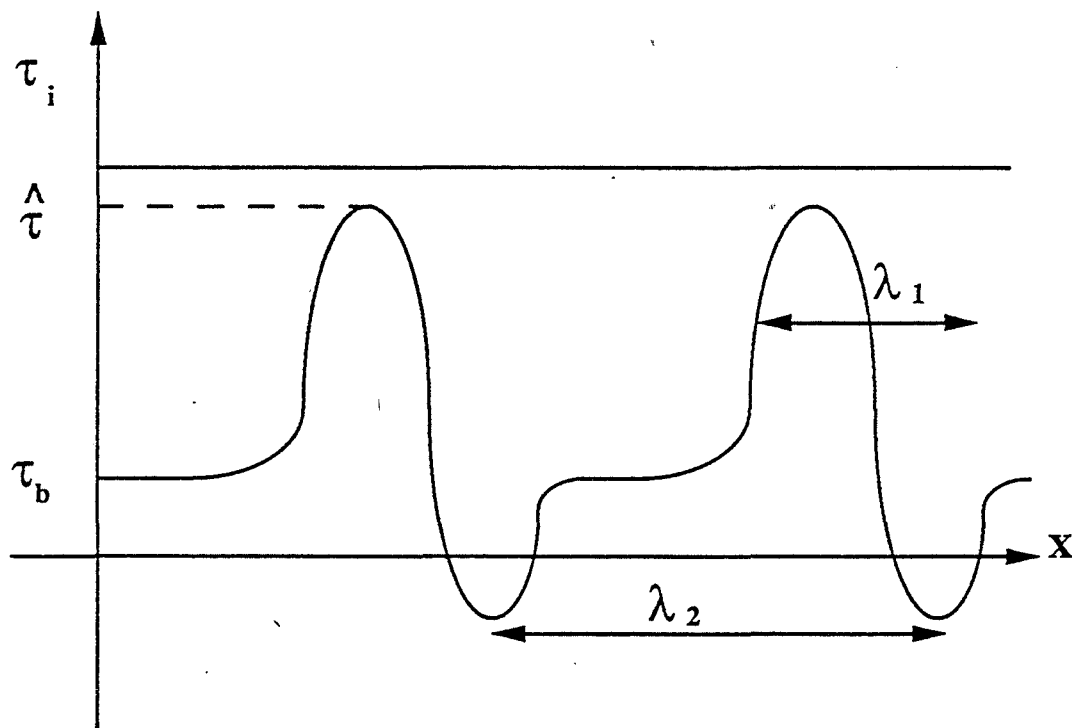
$\tau_b$  contrainte visqueuse du réseau

$\hat{\tau}$  contrainte visqueuse d'un obstacle local

$\tau(x)$  contrainte de l'obstacle à franchir :  $\tau_b \leq \tau(x) \leq \hat{\tau}$

or  $\sigma = \bar{M} \tau$ , d'où finalement :

$$\sigma = \sigma(x) + \frac{B \bar{M}^2}{b^2 \rho_m} \dot{\epsilon} \quad (8)$$



**Figure 2 :** Cas où la contrainte est suffisante pour que la dislocation franchisse les obstacles sans l'aide de l'activation thermique

Cette relation est bien du type  $\bar{\sigma}_{vm} = \sigma_0(\bar{\epsilon}_{vm}) + \beta(\bar{\epsilon}_{vm})\dot{\bar{\epsilon}}_{vm}$ . La loi linéaire avec seuil est donc justifiée théoriquement par la présence de frottements visqueux aux grandes vitesses de déformation.

D'autre part, la courte durée de l'essai effectué aux grandes vitesses de déformation permet de supposer la déformation adiabatique. Cette hypothèse entraîne une augmentation de température au cours de l'essai. REGAZZONI et MONTHEILLET [1985] ont montré que le cuivre déformé à  $3000 \text{ s}^{-1}$  jusqu'à une déformation de 0,4 subit une élévation de  $31^\circ$  à température ambiante et de  $16^\circ$  à  $500^\circ\text{C}$ . Tant que la déformation est supposée uniforme, nous négligerons l'effet d'un tel changement de température.

*\* Transition entre les deux comportements (cuivre CuC1)*

L'existence de deux types de comportement pour deux domaines de vitesses de déformation implique la présence d'une vitesse de déformation de transition  $\dot{\bar{\epsilon}}_T$ . Il est possible de calculer cette vitesse de déformation de transition  $\dot{\bar{\epsilon}}_T$  : elle correspond en effet au point  $(\dot{\bar{\epsilon}}_T, \bar{\sigma}_T)$  où les deux lois de comportements sont tangentes. En prenant les valeurs des constantes rhéologiques du cuivre CuC1 proposées par GIANNOTTA [1986], ce calcul est présenté dans l'annexe III. Il apparaît que la vitesse de transition  $\dot{\bar{\epsilon}}_T$  augmente avec la déformation. Ce résultat peut s'expliquer simplement par l'augmentation de la densité de dislocations mobiles au cours de la déformation.

*\* Approche macroscopique de la stabilité de l'élongation*

En 1967, HART a montré que l'augmentation du facteur de sensibilité à la vitesse  $m$  entraîne une augmentation de la stabilité et donc de la déformation à rupture. Pour cela, il considère une éprouvette de traction de section initiale  $A_0$  comportant une zone de section réduite  $A_0 - \delta A_0$  simulant un défaut initial ou une striction. En notant  $A$  la section de la partie homogène de l'éprouvette au cours de l'essai et  $A_s$  la section de la zone strictionnée correspondante ( $\delta A = A - A_s$ ), HART obtient :

$$\frac{\delta A}{\delta A_0} = \left( \frac{A_0}{A} \right)^{\left( \frac{1-m}{m} \right)} \quad (9)$$

Une augmentation de  $m$  entraîne, suivant cette relation, une diminution de  $\delta A$ , ce qui correspond bien à un ralentissement de l'instabilité.

Le changement de rhéologie entre les domaines quasistatique et dynamique entraîne une augmentation du coefficient de sensibilité à la vitesse  $m$  avec la vitesse de déformation. Cela favorise donc l'augmentation de ductilité du matériau, d'où une meilleure stabilité à l'élongation.

#### *\* Comportements compressibles*

Dans la suite, nous nous appuierons sur des lois de comportement similaires aux deux lois présentées ci-dessus. Cependant, elles seront modifiées afin de prendre en compte la compressibilité du matériau due à l'endommagement. Plus précisément, les grandeurs équivalentes de von Mises seront remplacées par les grandeurs équivalentes introduites dans le premier chapitre. En effet, ce sont les seuls comportements isotropes quadratiques possibles si l'influence du troisième invariant est négligée. Ce type de comportement compressible a déjà été proposé par SHIMA et OYANE [1976] pour l'étude d'un matériau parfaitement plastique endommagé.

Notons qu'il est important de discerner deux conséquences de la présence de cavités sur l'endommagement : d'une part l'apparition d'une compressibilité globale du matériau liée à la présence d'une fraction volumique non nulle de cavités ; d'autre part les interactions directes entre cavités. La différence entre ces deux contributions est simple à illustrer : l'étude d'un couple de cavités dans une matrice infinie mettra en évidence l'influence de chacune sur la croissance de l'autre, bien que la fraction volumique totale de cavités soit nulle (GILORMINI, LICHT et SUQUET [1988]). Comme dans le premier chapitre, nous n'étudions pas ici ces interactions directes entre cavités.

Afin d'appréhender l'endommagement des matériaux ductiles, de nombreux auteurs ont étudié la croissance d'une cavité isolée dans une matrice incompressible non linéaire.

## I.2. Cavité isolée dans une matrice incompressible infinie

### I.2.1. Cavité cylindrique dans une matrice parfaitement plastique

En 1968, MCCLINTOCK a étudié une cavité cylindrique d'axe  $\bar{e}_z$  et de section elliptique dans une matrice infinie, rigide parfaitement plastique ( $\bar{\sigma}_{vm} = \sigma_0$ ). La solution exacte est obtenue dans le cas d'une cavité cylindrique de section circulaire dans une matrice non écrouissable. En déformation plane dans le plan normal à  $\bar{e}_z$  et pour un chargement non axisymétrique ( $\sigma_{xx}^\infty \neq \sigma_{yy}^\infty$ ), l'auteur montre que la vitesse de croissance du rayon de la section est :

$$\frac{\dot{R}}{R \dot{\bar{\epsilon}}_{vm}^\infty} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh[\sqrt{3} \zeta^\infty] \quad (10)$$

A partir de ce résultat, MCCLINTOCK a proposé une relation approchée permettant de faire intervenir l'écrouissage de la matrice. Pour cela, le coefficient d'écrouissage  $n$  est introduit de façon à passer continûment du cas rigide parfaitement plastique ( $n=0$ ) au cas d'un écrouissage linéaire ( $n=1$ ). En déformation plane, pour un cylindre infini de section elliptique d'excentricité  $e_c$ , il vient :

$$\frac{\dot{R}}{R \dot{\bar{\epsilon}}_{vm}^\infty} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh[\sqrt{3}(1-n)\zeta^\infty] \quad (11)$$

$$\frac{\dot{e}_c}{\dot{\bar{\epsilon}}_{vm}^\infty} = \frac{-\sqrt{3}}{1-n} \left( e_c - \frac{4\zeta^\infty}{\sqrt{3}} \right) \sinh[\sqrt{3}(1-n)\zeta^\infty] \quad (12)$$

MCCLINTOCK montre ainsi que la vitesse de croissance des cavités :

- diminue si le coefficient d'écrouissage  $n$  augmente ;
- augmente de façon exponentielle avec la triaxialité des contraintes  $\zeta^\infty$ .
- $\dot{R}/R$  est indépendant de l'excentricité de la section du cylindre.

Rappelons que BERG [1962] obtient pour un comportement linéaire, une dépendance linéaire entre la vitesse de croissance du rayon de la cavité et la vitesse de déformation.

### I.2.2. Cavité sphérique dans une matrice parfaitement plastique

Le modèle précédent, concernant une cavité de forme cylindrique, traite une géométrie peu réaliste. En 1969, RICE et TRACEY ont étudié le cas d'une cavité sphérique dans une matrice rigide parfaitement plastique ( $\bar{\sigma}_{vm} = \sigma_0$ )

soumise à un chargement axisymétrique. Afin de résoudre ce problème, les auteurs ont appliqué un principe variationnel déduit de la convexité de la surface d'écoulement et de la loi de normalité. Ce principe impose que le champ de vitesse exact minimise la fonctionnelle :

$$F(\dot{\mathbf{u}}) = \int_{V-V_c} \left[ \phi(\dot{\mathbf{\epsilon}}_{vm}) - \phi(\dot{\mathbf{\epsilon}}_{vm}^\infty) - \sigma_{ij}^\infty \dot{\epsilon}_{ij} \right] dV + \int_S \sigma_{ij}^\infty n_i \dot{u}_j dS \quad (13)$$

où  $V$  est le volume total,  $V_c$  et  $S$  le volume et la surface de la cavité, et  $\phi(\dot{\epsilon})$  le potentiel des vitesses de déformation :  $\phi(\dot{\epsilon}) = \sigma_0 \dot{\epsilon}_{vm}$ . De même que dans le premier chapitre,  $\dot{\epsilon}$  est le tenseur de vitesses de déformation de *perturbation* (dû à la présence de la cavité).

RICE et TRACEY ont décomposé le champ de perturbation en un terme à symétrie sphérique (C) n'agissant que sur l'accroissement de volume et un terme de distorsion pure (D). Le champ total s'écrit alors :

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^\infty + C \dot{\mathbf{u}}^C + \dot{\mathbf{u}}^D \quad (14)$$

où

$$\dot{\mathbf{u}}^C = \dot{\mathbf{\epsilon}}_{vm}^\infty R^3 \frac{x_i}{(x_i x_i)^{3/2}}$$

$\dot{\mathbf{u}}^D$  correspond à un ensemble de champs de vitesse proposés et étudiés par les auteurs. Chacun d'entre eux est caractérisé par un paramètre.

L'amplitude  $C$  de  $\dot{\mathbf{u}}^C$  et celle de  $\dot{\mathbf{u}}^D$  sont déterminées par la minimisation de la fonctionnelle. Sachant que  $C$  correspond à l'accroissement de volume, il vient :

$$C = \frac{\dot{R}}{R \dot{\mathbf{\epsilon}}_{vm}^\infty} = \frac{\dot{V}}{3V \dot{\mathbf{\epsilon}}_{vm}^\infty} \quad (15)$$

RICE et TRACEY proposent 6 classes de champs pour  $\dot{\mathbf{u}}^D$ , ce qui leur permet de déduire :

- i) la croissance volumique de la cavité est très peu modifiée par le choix du champ  $\dot{\mathbf{u}}^D$
- ii) la valeur de la fonctionnelle est essentiellement déterminée par le terme de croissance volumique.

Pour les chargements de haute triaxialité, les auteurs ne conservent que le champ à symétrie sphérique, ce qui leur permet d'obtenir l'expression suivante :

$$\frac{\dot{R}}{R \dot{\epsilon}_{vm}^{\infty}} = 0,283 \chi \exp\left(\frac{3}{2} \chi \zeta^{\infty}\right) - 0,275 \chi \exp\left(-\frac{3}{2} \chi \zeta^{\infty}\right) \quad (16)$$

avec  $\chi = \text{sgn}(\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty} - \dot{\epsilon}_{xx}^{\infty})$

La vitesse de croissance des cavités sphériques est à nouveau une fonction exponentielle de la triaxialité à l'infini. Les auteurs généralisent alors leur résultat pour un chargement non axisymétrique, en ne considérant que les champs de vitesse à symétrie sphérique. Ils obtiennent ainsi :

$$\frac{\dot{R}}{R \dot{\epsilon}_{vm}^{\infty}} = 0,558 \sinh\left(\frac{3}{2} \zeta^{\infty}\right) + 0,008 \chi \cosh\left(\frac{3}{2} \zeta^{\infty}\right) \quad (17)$$

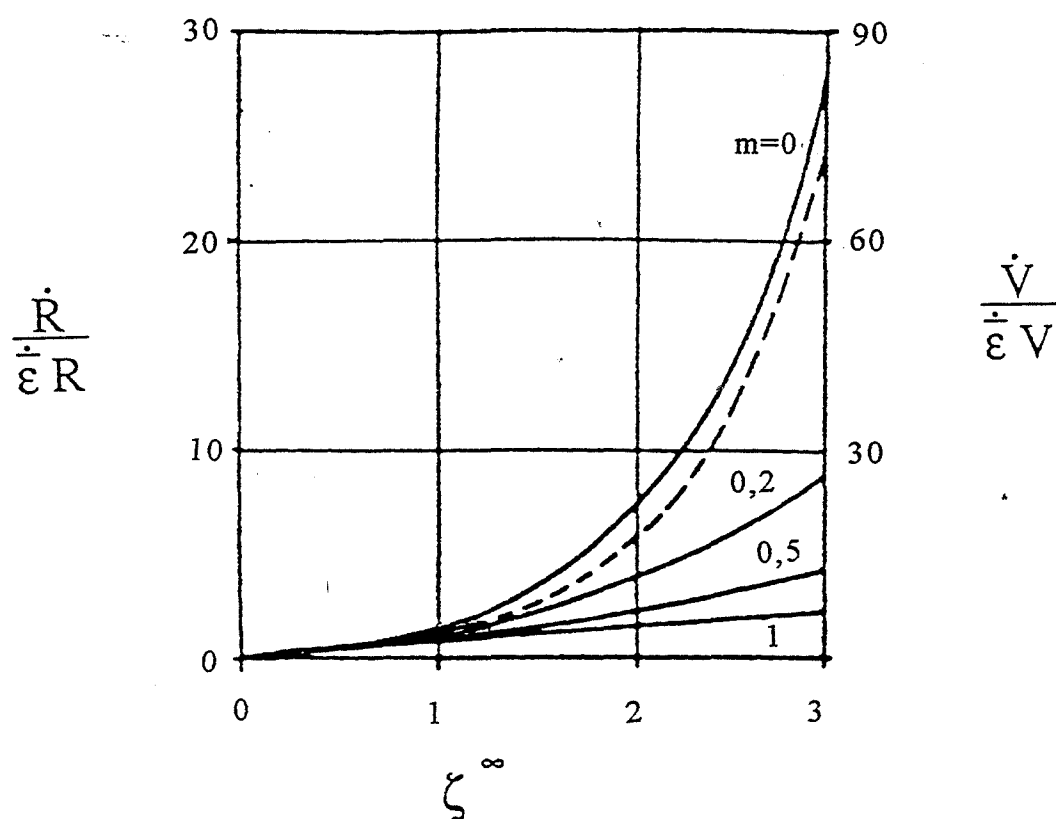
où  $\chi = -3 \dot{\epsilon}_{yy}^{\infty} / (\dot{\epsilon}_{xx}^{\infty} - \dot{\epsilon}_{zz}^{\infty})$  (avec  $\dot{\epsilon}_{xx}^{\infty} \geq \dot{\epsilon}_{yy}^{\infty} \geq \dot{\epsilon}_{zz}^{\infty}$ ). Cette définition de  $\chi$  restitue la définition précédente lorsque le chargement est axisymétrique. De plus, on peut montrer que cette équation se confond avec l'équation (16) dans le même cas.

### 1.2.3. Cavité sphérique dans une matrice pseudoplastique

BUDIANSKY, HUTCHINSON et SLUTSKY [1982] ont généralisé l'analyse de RICE et TRACEY à une matrice de comportement pseudoplastique ( $\bar{\sigma}_{vm} = k \dot{\epsilon}_{vm}^m$ ) en proposant une optimisation à 7 paramètres. Sur la figure 3, la vitesse de croissance d'une cavité sphérique est tracée en fonction de la triaxialité et du coefficient de sensibilité à la vitesse. L'augmentation de  $m$  diminue la vitesse de croissance des cavités. La différence observée dans le cas parfaitement plastique ( $m = 0$ ) entre RICE et TRACEY et BUDIANSKY et al. est attribuée au nombre de paramètres d'optimisation plus important utilisé par ces derniers. Pour une triaxialité à l'infini importante, BUDIANSKY, HUTCHINSON et SLUTSKY obtiennent la relation suivante, où seul le champ de perturbation à symétrie sphérique a été conservé :

$$\frac{\dot{R}}{R \dot{\epsilon}_{vm}^{\infty}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{3|\zeta^{\infty}|}{2m} + \frac{(m-1)}{m} \left( 1 + \frac{(0,4175 + 0,014 \zeta^{\infty})}{m} \right) \right]^m \quad (18)$$





**Figure 3 :** Influence de la triaxialité et de la sensibilité à la vitesse de déformation sur la vitesse de croissance d'une cavité sphérique soumise à une déformation axisymétrique.

(——) : Budiansky, Hutchinson et Slutsky

( - - - ) : Rice et Tracey

(GILORMINI, LICHT et SUQUET [1988])

Quand  $m$  tend vers zéro, cette équation restitue le résultat obtenu par RICE et TRACEY.

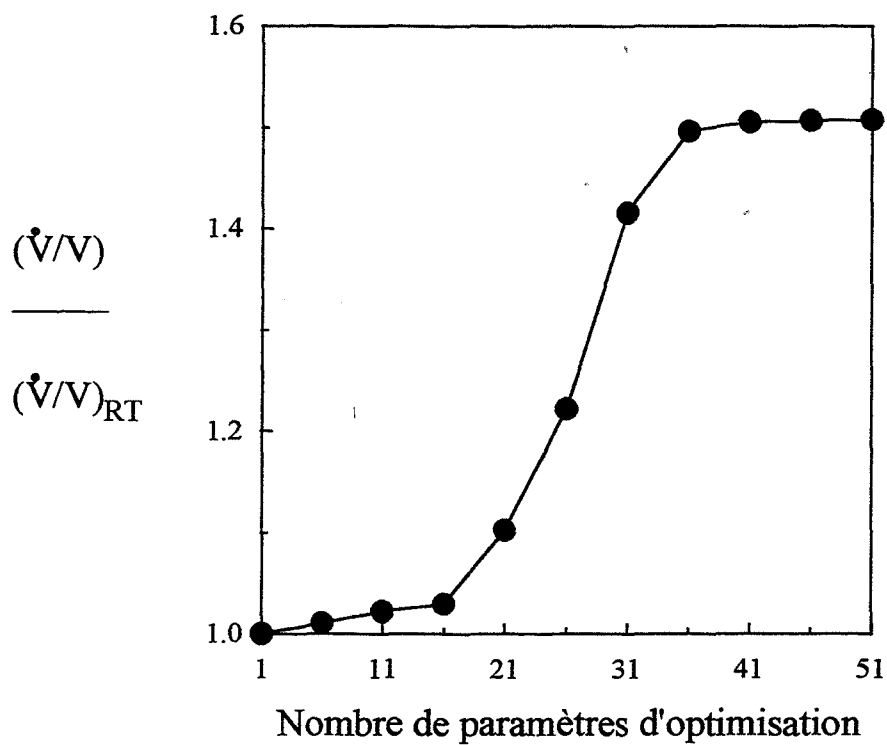
L'analyse effectuée permet aussi d'étudier le changement de forme de la cavité sphérique à l'instant initial de la déformation. Ceci met en évidence le "paradoxe" suivant associé à la non linéarité du comportement par les auteurs : pour une triaxialité imposée supérieure à 1,67 et  $\sigma_{zz}^{\infty} = S > \sigma_{\pi}^{\infty} = T$ , la cavité a tendance à s'aplatir alors que la matrice s'allonge suivant  $\bar{e}_z$ . Ce paradoxe avait été obtenu par RICE et TRACEY auparavant pour deux classes de champs parmi les 6 proposées. Cependant, ils en avaient rejeté la validité. En effet, la méthode de minimisation utilisée par RICE et TRACEY ne permet pas de comparer les minimum obtenus pour les différentes classes de champs. BUDIANSKY et al. montrent que les deux classes de champs abandonnées par RICE et TRACEY du fait de ce paradoxe apparent conduisent en réalité à la valeur la plus faible de la fonctionnelle.

#### **I.2.4. Cavité ellipsoïdale de révolution dans une matrice non linéaire**

##### ***\* Matrice pseudoplastique***

En 1991, KLÖCKER a calculé le champ de vitesse autour d'une cavité ellipsoïdale de révolution dans une matrice pseudoplastique au moyen du principe variationnel proposé par BUDIANSKY et al. Les auteurs s'appuient sur le champ exact calculé pour une matrice newtonienne, comportant un mode mixte agissant à la fois sur le volume et sur l'excentricité de la cavité (chapitre I). La classe de champs proposés pour la minimisation comporte deux paramètres d'optimisation permettant de séparer l'influence du chargement purement hydrostatique de celle du chargement purement déviatorique. Cette solution a l'avantage de restituer la solution exacte pour une matrice newtonienne.

En 1992, LEE et MEAR, puis GOLOGANU, LEBLOND et DEVAUX [1993] ont utilisé eux aussi le champ exact, associé à des modes de vitesse supplémentaires, afin d'obtenir une approximation du potentiel d'un matériau pseudoplastique ou parfaitement plastique contenant des cavités allongées.



**Figure 4 :** Vitesse de croissance volumique d'une cavité sphérique dans une matrice parfaitement plastique, pour une triaxialité égale à 4, en fonction du nombre de paramètres d'optimisation. Résultats normés par l'approximation haute triaxialité de Rice et Tracey (Huang [1991])

*\* Comportement linéaire avec seuil*

KLÖCKER [1991] a d'autre part étudié l'influence du changement de loi de comportement, lors du passage dans le domaine dynamique, sur la croissance d'une cavité. Ceci a permis de confirmer le rôle stabilisant d'une loi de comportement linéaire avec seuil. Cet effet stabilisant a été attribué à l'augmentation du coefficient de sensibilité à la vitesse avec la vitesse de déformation.

### **I.2.5. Conclusion**

L'ensemble des modèles exposés met en évidence l'importance de la triaxialité des contraintes à l'infini sur la croissance des cavités. En fonction de la loi de comportement de la matrice, cette dépendance évolue : pour des matrices respectivement parfaitement plastique, pseudoplastique ou newtonienne la vitesse de croissance normalisée d'une cavité  $\dot{R}/(\dot{\epsilon}_{vm}^\infty R)$  est une fonction exponentielle, puissance ou linéaire de la triaxialité des contraintes.

Lors d'une étude de la cavitation dans des solides élasto-plastiques, HUANG , HUTCHINSON et TVERGAARD [1989] ont montré que les résultats exposés précédemment sous-estiment la croissance des cavités. En 1991, HUANG a appliqué le principe variationnel proposé par BUDIANSKY et al. au cas d'un matériau parfaitement plastique. Cet auteur a calculé plusieurs solutions à l'aide de classes de champs composés, au maximum, de 51 paramètres d'optimisation. Il a mis ainsi en évidence l'augmentation de la croissance volumique en fonction du nombre de modes du champ de vitesse utilisé (Figure 4). Il semble qu'à partir d'une cinquantaine de paramètres, la vitesse de croissance volumique se stabilise. Notons que pour un si grand nombre de paramètres, l'intérêt d'une approche variationnelle est faible devant une approche purement numérique. Les résultats proposés précédemment, calculés avec peu de paramètres d'optimisation, ont le défaut de sous-estimer la croissance volumique mais l'avantage de mettre en évidence les tendances importantes.

## II. Méthode de calcul

### II.1. Présentation du problème

La présence de l'endommagement rend le matériau compressible. Ce changement de comportement influe sur la croissance d'une cavité isolée. Dans ce chapitre, nous déterminons l'influence de la compressibilité et de la non-linéarité de la matrice sur la croissance d'une cavité.

En 1982, BUDIANSKY et al. ont calculé la solution exacte pour une sphère creuse de matrice pseudoplastique (incompressible) soumise à un chargement hydrostatique ( $\sigma_{xx}^{\infty} = \sigma_{yy}^{\infty} = \sigma_{zz}^{\infty} = \sigma_m^{\infty}$ ). Le rapport des volumes de la cavité et de la sphère totale permet l'introduction de la fraction volumique de vides  $f$  :

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{3}{2} \left( \frac{m}{k} \right)^{1/m} \text{sgn}(\sigma_m^{\infty}) \left| \frac{3}{2} \sigma_m^{\infty} \right|^{1/m} (1 - f^m)^{-1/m} \quad (19)$$

En développant cette relation au premier ordre en  $f$ , on trouve :

$$\frac{\dot{V}}{V}(f) \approx \frac{\dot{V}}{V}(0) \left( 1 + \frac{f^m}{m} \right) \quad (20)$$

Pour un coefficient de sensibilité à la vitesse de 0,33, cette relation indique qu'une fraction volumique  $f = 10^{-3}$  augmente  $\dot{V}/V$  de 30 % (BUDIANSKY et al. [1982]). Ce cas simple montre clairement une forte influence de la fraction volumique lorsque  $m$  diminue.

Dans la suite de chapitre nous étudions l'influence du comportement viscoplastique *compressible* sur la croissance d'une cavité *isolée*. Comme dans le premier chapitre, le comportement de la matrice est supposé *constant* au cours de la déformation. La solution du problème est obtenue au moyen d'un principe variationnel. Les classes de champs de vitesse proposés pour obtenir une solution sont déduites des modes fondamentaux obtenus précédemment pour un comportement linéaire compressible (chapitre I).

Les deux comportements considérés dans la suite sont les suivants :

$$\text{pseudoplastique compressible} \quad \bar{\sigma}_{\dot{\epsilon}_{eq}} = k \dot{\epsilon}_{eq}^m \quad (21)$$

$$\text{linéaire avec seuil compressible} \quad \bar{\sigma}_{\dot{\epsilon}_{eq}} = \sigma_0 + \beta \dot{\epsilon}_{eq} \quad (22)$$

Le coefficient de sensibilité à la vitesse  $m$  est maintenant défini, par analogie avec le comportement pseudoplastique incompressible, de la façon suivante :

$$m = \left. \frac{\partial \ln \bar{\sigma}_{\dot{\epsilon}_{eq}}}{\partial \ln \dot{\epsilon}_{eq}} \right|_{\bar{\epsilon}_{eq}} \quad (23)$$

Lorsque le comportement considéré est incompressible, la définition classique est restituée.

Comparons en compressible, notre définition avec la définition classique  $m_0 = \left. \frac{\partial \ln \bar{\sigma}_{\dot{\epsilon}_{vm}}}{\partial \ln \dot{\epsilon}_{vm}} \right|_{\bar{\epsilon}_{vm}}$ . Lorsque la porosité est petite, le produit  $(y \dot{\epsilon}_{kk})$  est faible devant  $\dot{\epsilon}_{vm}$ . Un développement limité entraîne alors pour :

$$\text{la loi pseudoplastique} \quad m_0 = m + (1-m) \left[ \frac{y \dot{\epsilon}_{kk}}{\dot{\epsilon}_{vm}} \right]^2 + o \left( \left[ \frac{y \dot{\epsilon}_{kk}}{\dot{\epsilon}_{vm}} \right]^4 \right) \quad (24)$$

$$\text{la loi linéaire avec seuil} \quad m = m_0 + \frac{1}{2} m_0^2 \frac{\sigma_0}{\beta \dot{\epsilon}_{vm}} \left[ \frac{y \dot{\epsilon}_{kk}}{\dot{\epsilon}_{vm}} \right]^2 + o \left( \left[ \frac{y \dot{\epsilon}_{kk}}{\dot{\epsilon}_{vm}} \right]^4 \right)$$

La différence entre les deux définitions est du deuxième ordre en  $(y \dot{\epsilon}_{kk}) / \dot{\epsilon}_{vm}$ .

## II.2. Principe variationnel utilisé

HILL [1956] a montré que le champ de vitesse exact, minimise la fonctionnelle suivante par rapport à tous les champs de vitesse cinématiquement admissibles :

$$F(\dot{\mathbf{u}}) = \int_V \phi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) dV - \int_{S^\infty} \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma}^\infty \bar{\mathbf{n}} dS \quad (25)$$

où  $\phi$  est le potentiel convexe des vitesses de déformation tel que  $\sigma_{ij} = \partial \phi / \partial \dot{\epsilon}_{ij}$ ,  $\bar{\mathbf{n}}$  la normale sortante,  $V$  le volume total de matière et  $S^\infty$  la surface extérieure.

Malheureusement, dans le cas d'une matrice infinie, les intégrales de la relation (25) divergent. Pour pallier ce problème, on suit l'approche proposée par BUDIANSKY et al.[1982] :

Le champ homogène vérifie par définition :

$$F(\dot{\mathbf{u}}^\infty) = \int_V \varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\infty) dV - \int_{S^\infty} \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma}^\infty \bar{\mathbf{n}} dS \quad (26)$$

Si on soustrait cette relation à (25), il vient :

$$F(\dot{\mathbf{u}}) - F(\dot{\mathbf{u}}^\infty) = \int_V (\varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\infty)) dV - \int_{S^\infty} (\dot{\mathbf{u}}^\infty)^T \boldsymbol{\sigma}^\infty \bar{\mathbf{n}} dS \quad (27)$$

Or,  $\boldsymbol{\sigma}^\infty$  est statiquement admissible et  $\dot{\mathbf{u}}$  (vitesses de perturbation) cinématiquement admissible. Ils vérifient donc l'équation des travaux virtuels :

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^\infty \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = \int_{S^\infty} \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma}^\infty \bar{\mathbf{n}} dS + \int_{S_{cav}} \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma}^\infty \bar{\mathbf{n}} dS \quad (28)$$

Ces deux dernières relations fournissent la forme finale de la fonctionnelle :

$$F(\dot{\mathbf{u}}) - F(\dot{\mathbf{u}}^\infty) = G(\dot{\mathbf{u}}) = \int_V (\varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\infty) - \boldsymbol{\sigma}^\infty \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV - \int_{S_{cav}} \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma}^\infty \bar{\mathbf{n}} dS \quad (29)$$

L'intégrale volumique converge pour une matrice infinie si le champ est du type  $r^{-p}$  avec  $p > 3/2$ .

Afin d'appliquer ce principe variationnel à notre problème, il est nécessaire de connaître les potentiels pour les lois de comportement étudiées.

Les potentiels des vitesses de déformation définis par  $\varphi = \int_0^{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq} d\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}$  peuvent s'écrire alors de la façon suivante :

Loi pseudoplastique :

$$\begin{aligned} \varphi_p &= \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^{\frac{m+1}{m+1}}}{\frac{m+1}{m+1}} = k \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^{\frac{m+1}{m+1}}}{\frac{m+1}{m+1}} \\ \Rightarrow \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq} &= \frac{\partial \varphi_p}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}} = k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^{\frac{m}{m+1}} \quad \text{et} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \varphi_p}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} \end{aligned} \quad (30)$$

Loi linéaire avec seuil :

$$\begin{aligned}\varphi_{1s} &= \sigma_0 \dot{\bar{\varepsilon}}_{\dot{\varepsilon}q} + \beta \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_{\dot{\varepsilon}q}^2}{2} \\ \Rightarrow \bar{\sigma}_{\dot{\varepsilon}q} &= \frac{\partial \varphi_{1s}}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}_{\dot{\varepsilon}q}} = \sigma_0 + \beta \dot{\bar{\varepsilon}}_{\dot{\varepsilon}q} \quad \text{et} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \varphi_{1s}}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}\end{aligned}\quad (31)$$

### II.3 Formes des champs de vitesse adoptées

La résolution numérique du problème revient donc à minimiser la fonctionnelle (29). Pour obtenir la solution exacte, il faudrait utiliser une base complète de l'espace fonctionnel. Cependant, nous considérons ici une base tronquée, fondée sur la solution exacte obtenue en linéaire. Les différentes classes de champs proposées se décomposent toutes sur cette base.

Dans le premier chapitre, trois modes fondamentaux ont été mis en évidence. Le mode 3 peut être subdivisé en un terme à divergence nulle et un terme à divergence non nulle qui sera noté désormais "mode 4". Les vitesses de déformation, *dans le cas linéaire*, s'écrivent alors :

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}^{\infty} + \frac{3}{2} \dot{\varepsilon}_{vm}^{\infty} \left[ a_I \eta_{kl}^I + \zeta^{\infty} b_I \eta_{kl}^I \right] \quad (32)$$

avec :

$$\begin{cases} a_I = \frac{2\alpha_I^S - \alpha_I^T}{3} \\ b_I = \alpha_I^S + \alpha_I^T \end{cases} \quad \text{pour } I=1..4$$

en posant  $a_4 = (1 - 2 \nu) a_3$  et  $b_4 = (1 - 2 \nu) b_3$ .

Les  $\eta_{kl}^I$  sont les vitesses de déformation déduites des modes de vitesses  $\bar{g}^I$  (chapitre I).

Les trois formes de champ proposées pour l'optimisation sont définies de la façon suivante :

1) Le premier type consiste à relaxer simultanément les parties hydrostatique et déviatorique de la vitesse de déformation :

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}^{\infty} + \frac{3}{2} \dot{\varepsilon}_{vm}^{\infty} \left[ y_1 a_I \eta_{kl}^I + y_2 \zeta^{\infty} b_I \eta_{kl}^I \right] \quad (33)$$



Ce champ contient donc deux paramètres d'optimisation  $y_1$  et  $y_2$  prenant la valeur 1 dans le cas linéaire.

2) La résolution exacte du cas linéaire a mis en évidence un "quatrième mode" pour un matériau compressible. Donner à ce mode un degré de liberté supplémentaire pour observer son influence en non linéaire permet d'obtenir une deuxième classe de champs:

$$\dot{\epsilon}_{kl} = \dot{\epsilon}_{kl}^{\infty} + \frac{3}{2} \dot{\epsilon}_{vm}^{\infty} \left[ y_1 (a_i \eta_{kl}^i + y_3 a_4 \eta_{kl}^4) + y_2 \zeta^{\infty} (a_i \eta_{kl}^i + y_4 a_4 \eta_{kl}^4) \right] \quad (34)$$

pour  $i=1..3$ . Ce qui donne 4 paramètres d'optimisation  $y_I$ .

3) La dernière proposition s'appuie sur le fait qu'il est possible d'annuler la composante tangentielle du vecteur contrainte  $\sigma_{st}$  à la surface de la cavité, quelle que soit la loi de comportement. Le champ s'écrit sous une forme analogue à la relation (32) :

$$\dot{\epsilon}_{kl} = \dot{\epsilon}_{kl}^{\infty} + \frac{3}{2} \dot{\epsilon}_{vm}^{\infty} \left[ a_I^{nl} \eta_{kl}^I + \zeta^{\infty} b_I^{nl} \eta_{kl}^I \right] \quad (35)$$

où 
$$\begin{cases} a_I^{nl} = a_I y_I \\ b_I^{nl} = b_I y_{4+I} \end{cases} \quad \text{sans sommation sur } I \text{ et pour } I = 1..4$$

Il comporte donc 8 paramètres. L'annulation de  $\sigma_{st}(R)$  est équivalente à l'annulation de  $\dot{\epsilon}_{st}(R)$ . Quatre équations sont ainsi obtenues, réduisant le nombre de paramètres à 4.

Pour les deux autres classes de champs proposées, le calcul montre que  $\dot{\epsilon}_{st}(R)$  [et donc  $\sigma_{st}(R)$ ] reste faible (de l'ordre du pourcent) par rapport à  $\dot{\epsilon}_{st}^{\infty}(R)$ .

Ces trois formes de champs de vitesse ont toutes pour avantage de restituer la solution exacte pour un matériau de comportement linéaire. Dans le cas de l'élasticité linéaire, ESHELBY [1957] a montré qu'une cavité (ou une inclusion) ellipsoïdale de révolution se déforme de façon homogène et qu'elle conserve ce type de forme. En revanche, dans le cas du comportement non linéaire ceci n'est plus vérifié. Or, les champs que nous avons proposés transforment tous un ellipsoïde en un autre ellipsoïde. Nous avons donc implicitement imposé à la cavité de garder une forme ellipsoïdale au cours de

la déformation. Cette constatation montre que les champs proposés sont incomplets.

### III. Analyse des résultats

L'homogénéisation d'un matériau hétérogène endommagé linéaire nous montrera (chapitre III) que la valeur de  $\nu$  décroît lentement avec la fraction volumique de cavités et donc avec la déformation imposée. Dans la suite nous allons comparer les résultats entre une matrice de comportement *non linéaire incompressible* et une matrice de comportement *non linéaire compressible*. La valeur du paramètre rhéologique " $\gamma$ " sera infinie pour le matériau incompressible. Pour le matériau compressible,  $\gamma$  a la même valeur que dans une matrice linéaire de coefficient de Poisson visqueux  $\nu = 0,4$  :  $\gamma = 0,816$  [en effet pour un matériau linéaire, on a :  $\gamma^2 = 2(1 + \nu) / (9(1 - 2\nu))$ ].

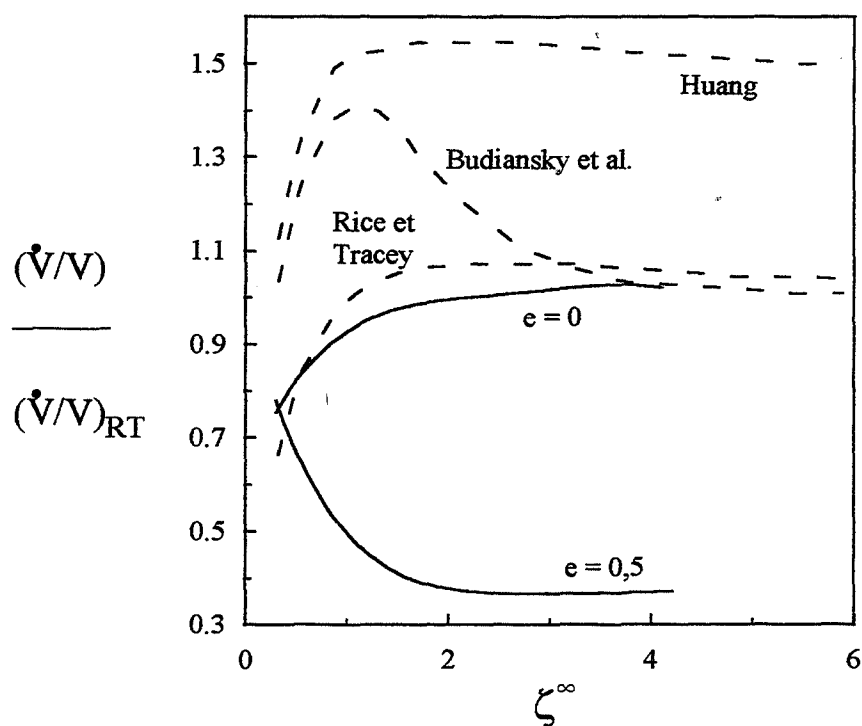
#### III.1. Comparaison des solutions obtenues

Les trois formes de champ proposées ont finalement donné des courbes superposables en ce qui concerne la croissance de la cavité (ce résultat est cohérent car la base des modes est la même pour les trois classes de champ). Pour cette raison, les courbes présentées dans la suite ont été calculées à l'aide du premier champ proposé (à deux paramètres d'optimisation).

Sur la figure 5 sont portées les vitesses logarithmiques de croissance volumique d'une cavité sphérique dans une matrice parfaitement plastique incompressible en fonction de la triaxialité imposée. Celle-ci est normée par l'approximation à haute triaxialité proposée par RICE et TRACEY [équation (16)] :

$$\left( \frac{\dot{V}}{V \dot{\epsilon}_{vm}^{\infty}} \right)_{RT} \approx 0,85 \exp\left(\frac{3}{2} \zeta^{\infty}\right) \quad (36)$$

Notre formalisme permet de calculer ce cas et de comparer les résultats à ceux de la bibliographie. HUANG [1991] a montré que les résultats de RICE et TRACEY ainsi que ceux de BUDIANSKY et al. sous-estiment la croissance volumique. Ceci est attribué au nombre de paramètres d'optimisation adoptés : 2 pour RICE et TRACEY, 7 pour BUDIANSKY et al. et 51 dans cette figure pour HUANG. Notre



**Figure 5 :** Comparaison des différentes formes de champs proposées pour l'étude d'un matériau parfaitement plastique incompressible  
 Traits interrompus : résultats bibliographiques (cavité sphérique)  
 Traits continus : notre proposition (cavité ellipsoïdale)  
 Résultats normés par l'approximation haute triaxialité de Rice et Tracey

solution obtenue à l'aide de deux paramètres se trouve légèrement au dessus de celle de RICE et TRACEY aux faibles triaxialités, puis devient légèrement inférieure aux grandes triaxialités. Rappelons que notre but est d'analyser d'une part l'influence de la compressibilité de la matrice, et d'autre part de calculer la croissance de cavités ellipsoïdales de révolution. A titre de comparaison la vitesse de croissance volumique d'une cavité d'excentricité  $e = 0,5$  est portée sur la même figure. L'influence de la forme de la cavité sur sa vitesse de croissance apparaît alors nettement. Nous supposons dans la suite que la solution proposée permet de mettre en évidence les tendances majeures de l'évolution de la cavité, bien que la vitesse de croissance soit sous-estimée.

### III.2. Comportement pseudoplastique compressible

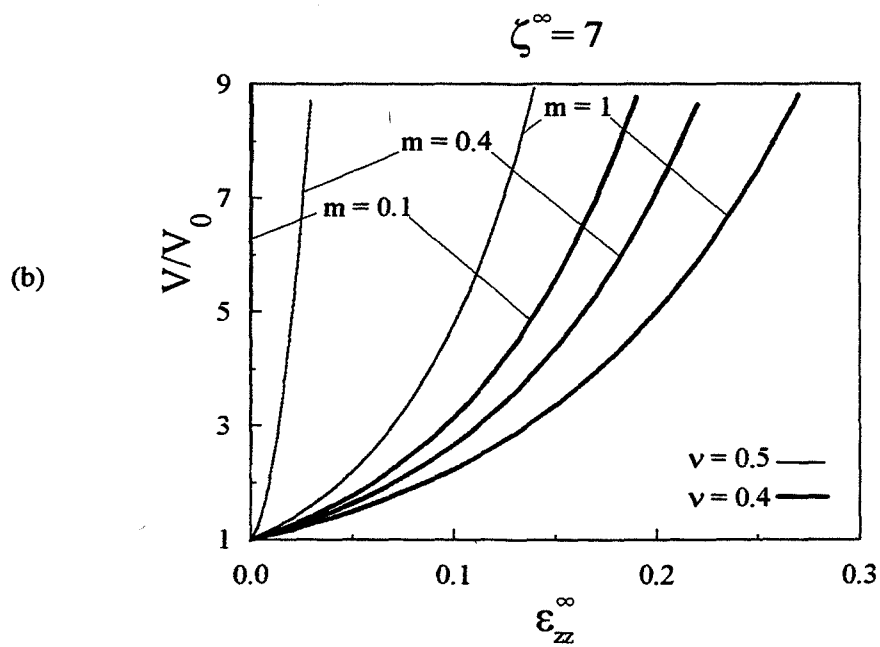
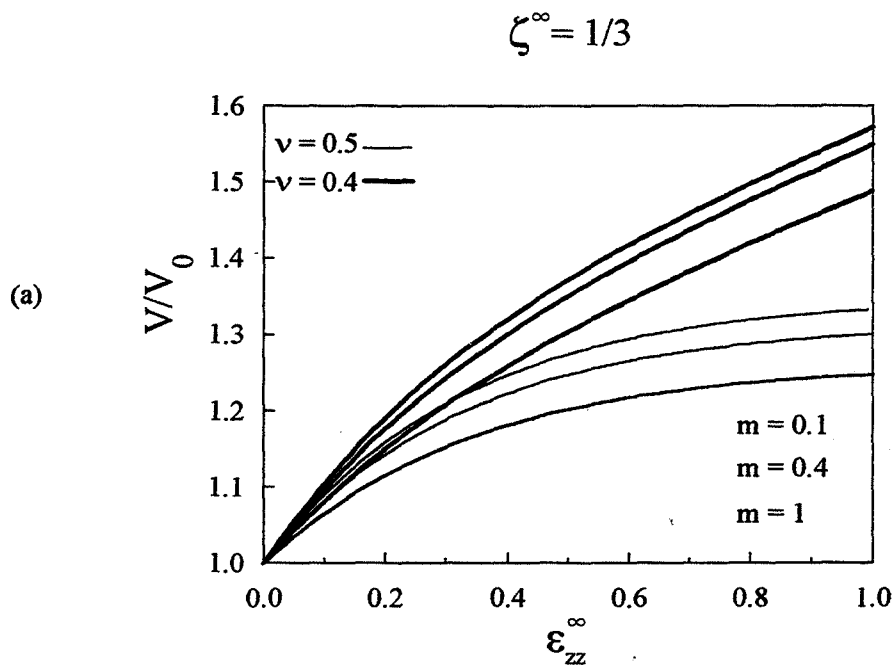
#### III.2.1. Croissance de la cavité

La solution obtenue permet d'étudier l'évolution du volume et de l'excentricité d'une cavité isolée en fonction de la déformation imposée [déformation de référence :  $\varepsilon_{zz}^{\infty}$  (chapitre I)]. Les courbes sont tracées pour trois valeurs du coefficient de sensibilité à la vitesse  $m = 1, 0,4$  et  $0,1$  permettant de comparer le comportement linéaire ( $m = 1$ ), dont la solution exacte est restituée par le modèle, à un comportement proche du parfaitement plastique ( $m = 0$ ). Deux triaxialités sont imposées  $\zeta^{\infty} = 1/3$  (traction uniaxiale) et  $7$  (impacts de plaques).

#### *\* Croissance de $V/V_0$ en fonction de la déformation*

La figure 6 présente l'évolution du volume d'une cavité initialement sphérique pour une triaxialité faible ( $\zeta^{\infty} = 1/3$ ) (Figure 6a) et élevée ( $\zeta^{\infty} = 7$ ) (Figure 6b). Comme l'ont déjà montré les résultats bibliographiques, la triaxialité a pour effet d'accélérer fortement la croissance des cavités.

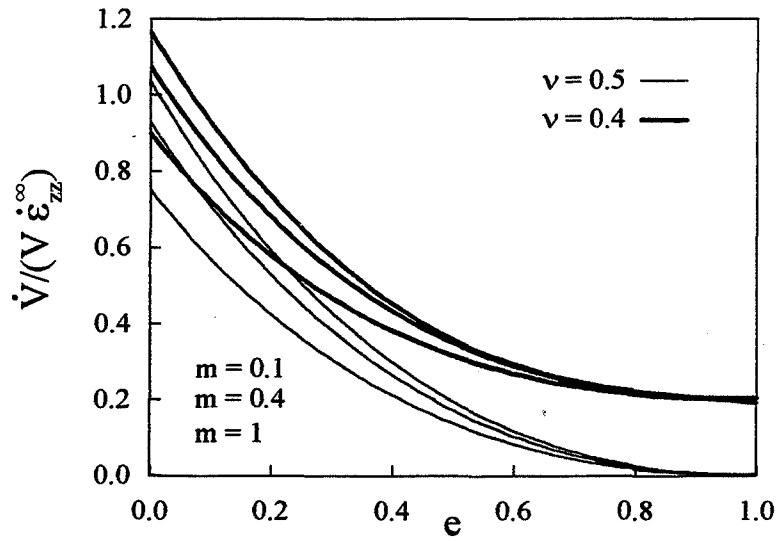
D'autre part, la diminution du coefficient de sensibilité à la vitesse  $m$  entraîne une accélération importante de la croissance volumique. Ceci est à rapprocher des résultats de HART [1967] qui prévoient à l'échelle macroscopique une augmentation de stabilité lors d'une augmentation de  $m$ .



**Figure 6 :** Croissance d'une cavité initialement sphérique dans une matrice pseudoplastique pour une triaxialité imposée de 1/3 (a) et de 7 (b) pour  $S > T$

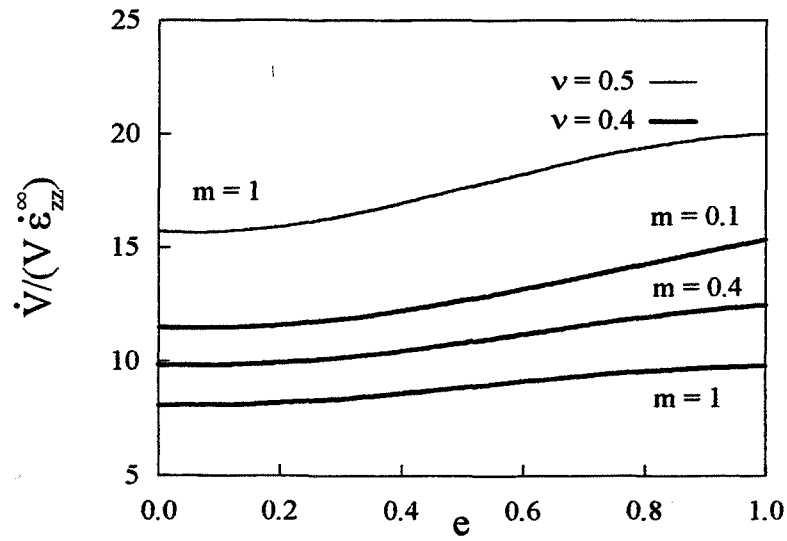
$$\zeta^\infty = 1/3$$

(a)

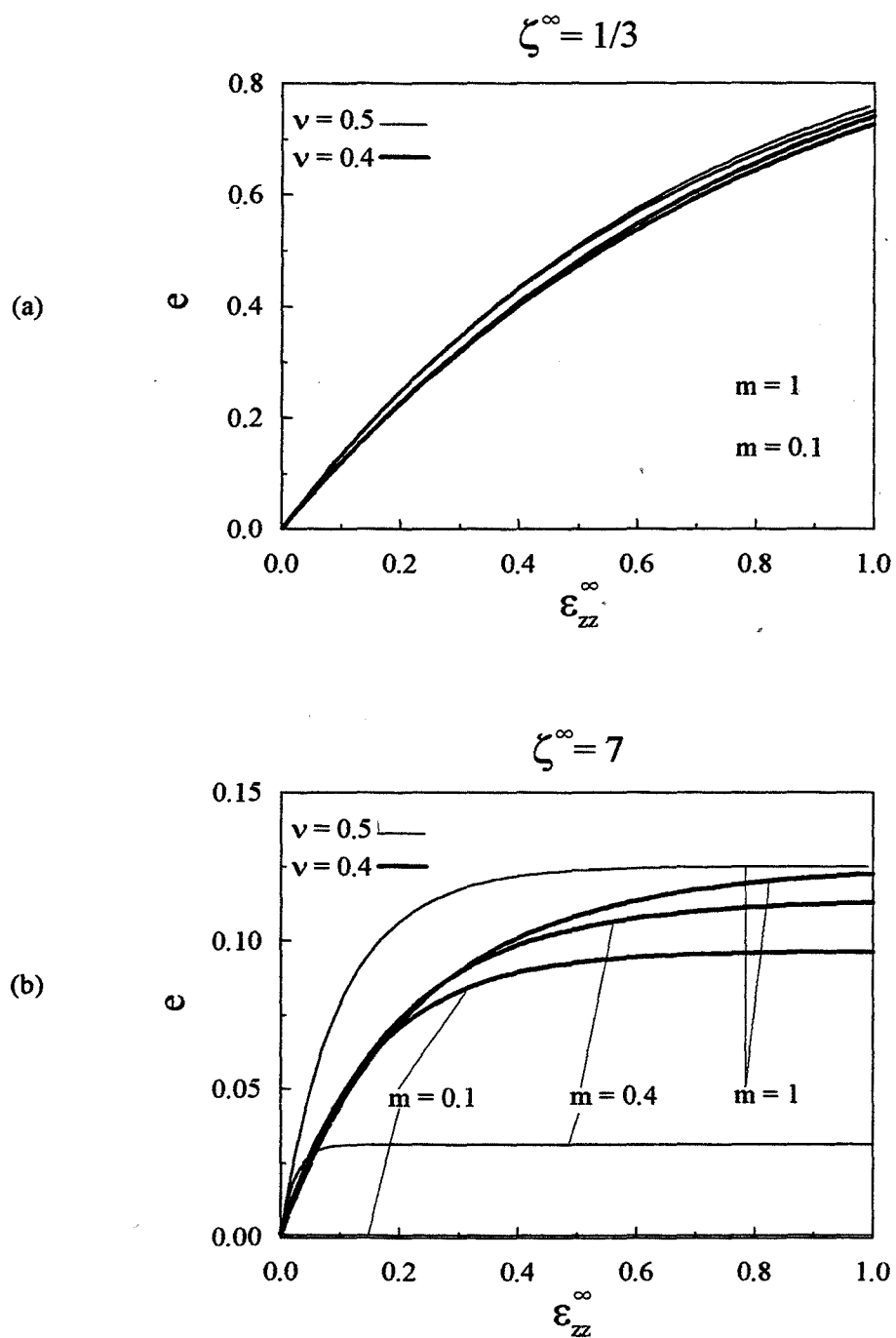


$$\zeta^\infty = 7$$

(b)



**Figure 7 :** Influence de la forme des cavités sur la croissance volumique dans une matrice pseudoplastique pour une triaxialité de 1/3 (a) et de 7 (b)



**Figure 8 :** Evolution de l'excentricité d'une cavité initialement sphérique dans une matrice pseudoplastique pour une triaxialité imposée de 1/3 (a) et de 7 (b) pour  $S > T$

La figure 6 montre que ces deux conclusions restent valables lorsque le comportement est compressible. Cependant, de même que pour un matériau linéaire, l'effet de la compressibilité dépend de la triaxialité imposée. Sous un chargement uniaxial ( $\zeta^\infty = 1/3$ ) la cavité croît plus vite dans une matrice endommagée. En revanche, elle croît moins vite dans une matrice compressible sous une triaxialité élevée. Ces tendances sont cependant liées au choix de la déformation de référence (chapitre I). Ainsi, nous avons montré que si la déformation de référence est  $\bar{\epsilon}_{vm}^\infty = \int_0^t \dot{\epsilon}_{vm}^\infty dt$ , la compressibilité de la matrice accélère toujours la croissance de la cavité.

#### *\* Influence de la forme sur la croissance volumique*

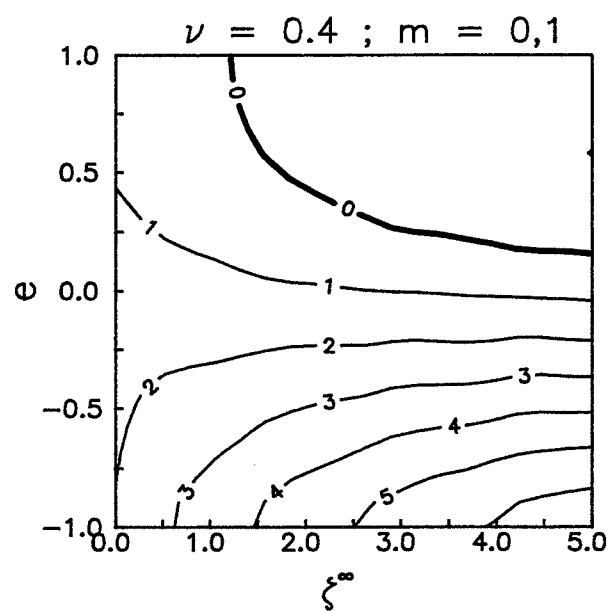
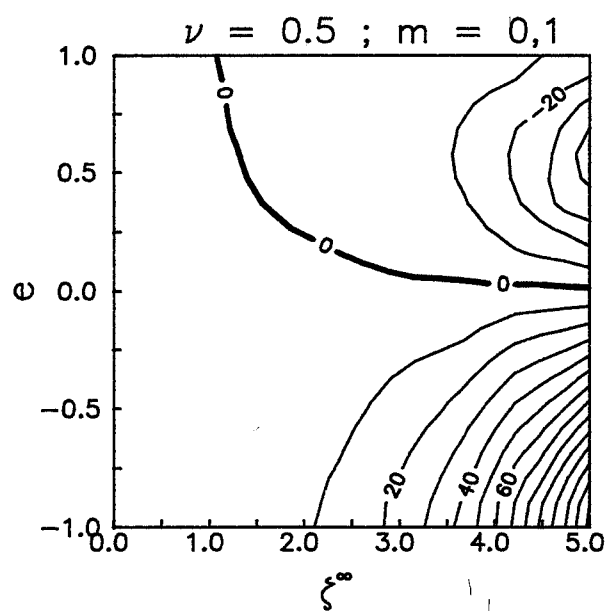
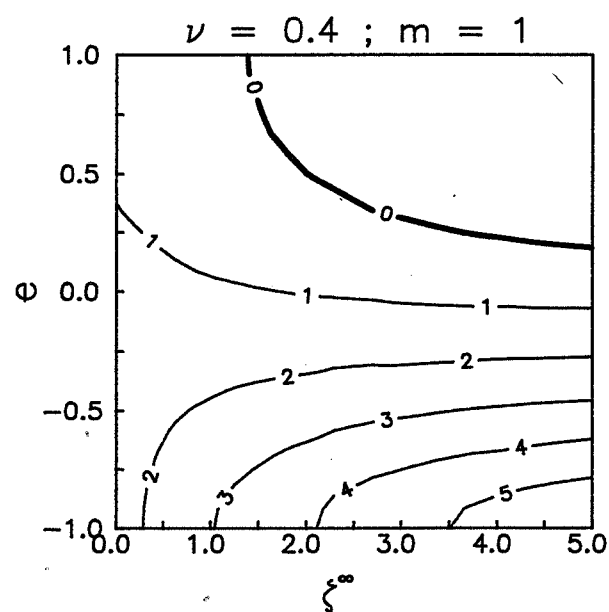
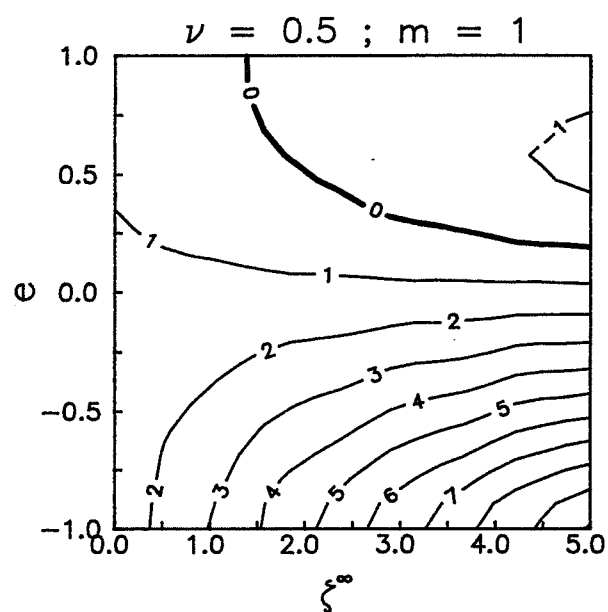
La figure 7 montre l'influence de l'excentricité sur la vitesse logarithmique de croissance volumique  $\dot{V}/V$ . Outre les tendances observées sur la figure précédente, il apparaît un changement d'influence entre faible et haute triaxialité.

Pour un chargement uniaxial ( $\zeta^\infty = 1/3$ ),  $\dot{V}/V$ , plus important pour une matrice compressible, diminue lorsque l'excentricité augmente. Une cavité cylindrique croît donc moins vite qu'une cavité sphérique. Ce résultat n'est pas surprenant : en effet lorsque l'on tire suivant l'axe de symétrie d'un cylindre infini, il ne peut s'allonger plus, en revanche une sphère peut s'allonger dans toutes les directions. Sur la figure 7a, il apparaît qu'une cavité cylindrique isolée dans une matrice incompressible pseudoplastique a une croissance volumique nulle sous cette triaxialité, quelle que soit la sensibilité à la vitesse considérée. L'effet de la non linéarité diminue lorsque la cavité s'allonge, pour devenir nul pour une cavité cylindrique.

A haute triaxialité, la tendance est inversée : la croissance des cavités allongées est la plus importante. On remarque aussi une faible augmentation de l'influence de  $m$  lorsque l'excentricité augmente.

Sur la figure 7b, pour un matériau incompressible seule la courbe correspondant au comportement linéaire ( $m = 1$ ) est représentée. Les courbes calculées pour  $m = 0,1$  et  $0,4$  prennent en effet des valeurs beaucoup trop importantes pour être présentées à la même échelle. Ceci indique clairement l'influence très forte de la compressibilité sur les effets du comportement non linéaire.





**Figure 9 :** Courbes isovaleurs de  $\dot{\epsilon}/\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty}$  en fonction de la triaxialité imposée ( $S > T$ ) et de l'excentricité dans une matrice pseudoplastique

### III.2.2. Evolution de l'excentricité

#### \* Evolution de l'excentricité en fonction de la déformation

La figure 8 présente l'évolution de la forme d'une cavité initialement sphérique ( $e = 0$ ) en fonction de la déformation de référence  $\varepsilon_{zz}^{\infty}$ . Sous un chargement uniaxial (Figure 8a), les influences de la compressibilité de la matrice ainsi que de la non linéarité sont négligeables. La cavité s'allonge pour prendre la forme finale d'un cylindre ( $e = 1$ ).

A haute triaxialité, lorsque le coefficient de sensibilité à la vitesse diminue, l'excentricité de la cavité évolue de moins en moins, pour rester presque nulle lorsque  $m = 0,1$  pour un comportement incompressible (Figure 8b). Cette tendance s'observe encore lorsque la matrice est endommagée. Cependant les effets sont moins importants. *La compressibilité du matériau global diminue les effets de la non linéarité sur l'évolution de l'excentricité.*

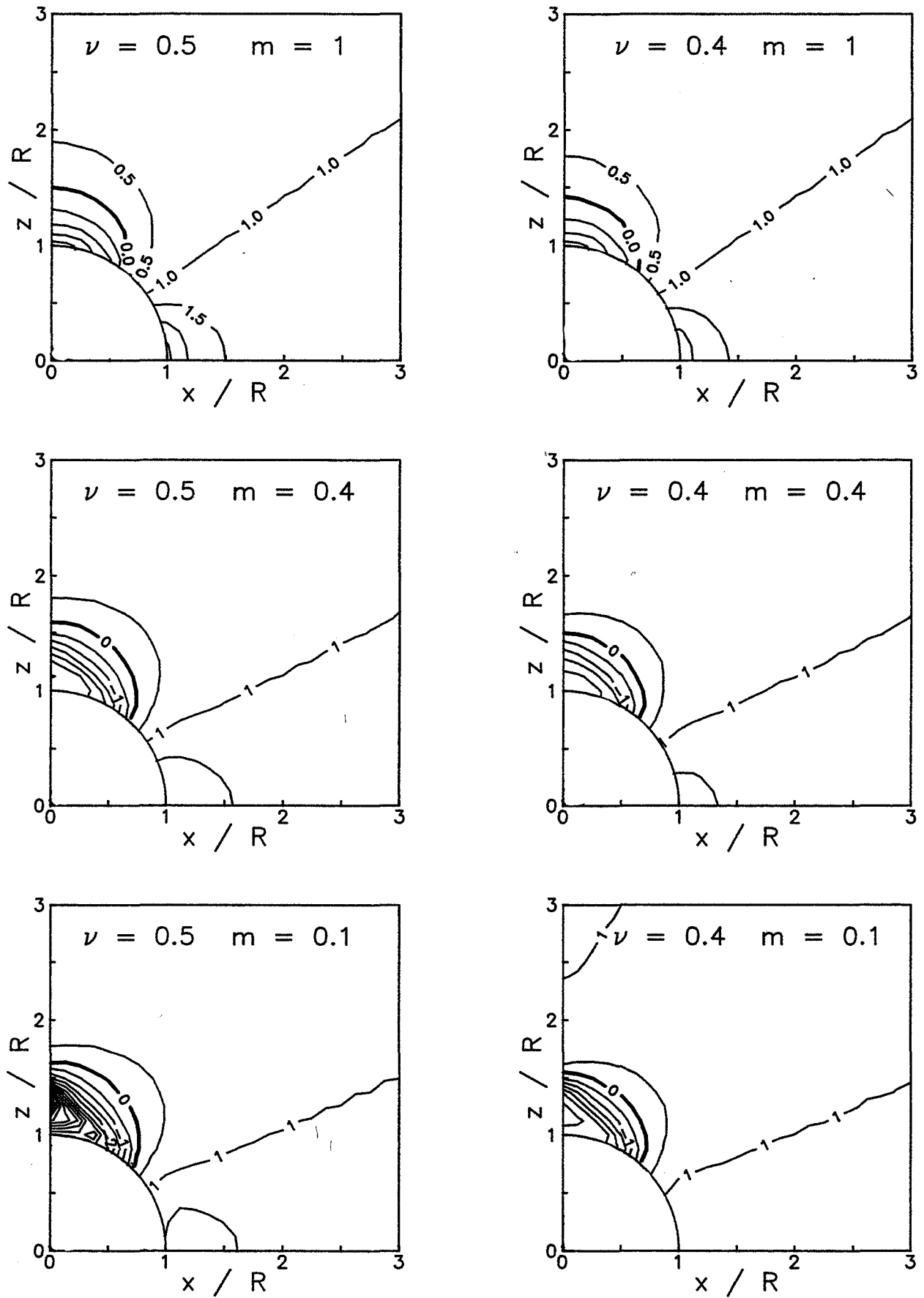
#### \* Forme asymptotique

Dans le premier chapitre, l'existence d'une forme asymptotique pour un chargement donné a été rappelée. Cette notion existe toujours pour un comportement non linéaire. Mais *la forme asymptotique, indépendante de la compressibilité de la matrice dans le cas linéaire, dépend de celle-ci lorsque  $m$  est inférieure à l'unité* (Figure 8b). L'anisotropie induite par l'endommagement est ralentie par la diminution du coefficient de sensibilité à la vitesse. Ceci s'explique par l'importance que prend le premier mode de déformation pour un comportement non linéaire (RICE et TRACEY [1969]).

Afin de mieux appréhender cette notion de forme asymptotique pour un comportement pseudoplastique, des courbes isovaleurs de  $\dot{\varepsilon}$  ont été tracées (Figure 9) dans l'espace  $(\zeta^{\infty}, e)$ . Les courbes présentées sont calculées pour une vitesse de déformation axiale imposée unitaire et pour deux valeurs du coefficient de sensibilité à la vitesse  $m = 1$  et  $0,1$ . Lorsque  $m$  décroît deux effets apparaissent :

- Une forte augmentation des modules de  $\dot{\varepsilon}$ . La cavité tend d'autant plus vite vers sa forme finale que  $m$  est faible.

$$\zeta^\infty = 1/3$$



**Figure 10 :** Courbes isovaleurs de contrainte moyenne autour d'une cavité sphérique pour un chargement uniaxial

- La courbe d'isovaleurs  $\dot{\epsilon} = 0$  (correspondant à la valeur de l'excentricité asymptotique pour une triaxialité donnée) est décalée à la fois vers les excentricités et les triaxialités les plus faibles.

Nous avons présenté dans la partie bibliographique, le "paradoxe" mis en évidence par BUDIANSKY et al. [1982] : une cavité initialement sphérique s'aplatit lorsque  $m < 0,5$  et  $\zeta^\infty > 1,51$  ( $S > T$ ) alors que la matrice s'allonge dans le sens longitudinal. Ce paradoxe est attribué par les auteurs au comportement non linéaire. Or, la figure 9 montre que ce phénomène existe déjà pour un comportement newtonien pour des cavités non sphériques. *Toute cavité d'excentricité supérieure à sa forme asymptotique va s'aplatir afin d'atteindre sa forme finale bien que la contrainte axiale imposée  $S$  soit supérieure à la contrainte radiale  $T$ .* Lorsque le coefficient de sensibilité à la vitesse diminue, le domaine où ce phénomène intervient s'agrandit.

L'influence de la compressibilité du matériau endommagé est aussi visible sur ces courbes isovaleurs de  $\dot{\epsilon}$ . La diminution de l'excentricité asymptotique avec  $m$ , ainsi que l'augmentation des valeurs de  $\dot{\epsilon}$  sont toujours observées, mais leur ampleur est plus faible. L'influence du coefficient de sensibilité à la vitesse  $m$  sur les courbes isovaleurs devient faible lorsque la matrice est compressible ( $\nu = 0,4$ ).

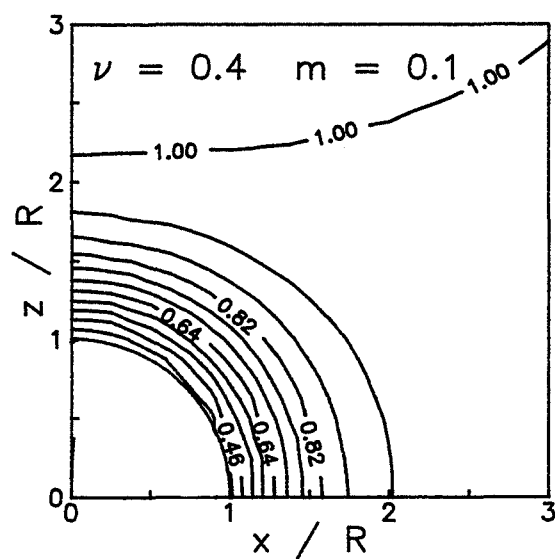
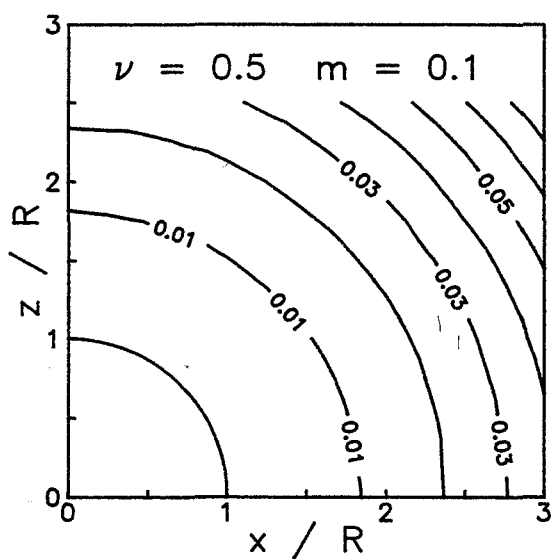
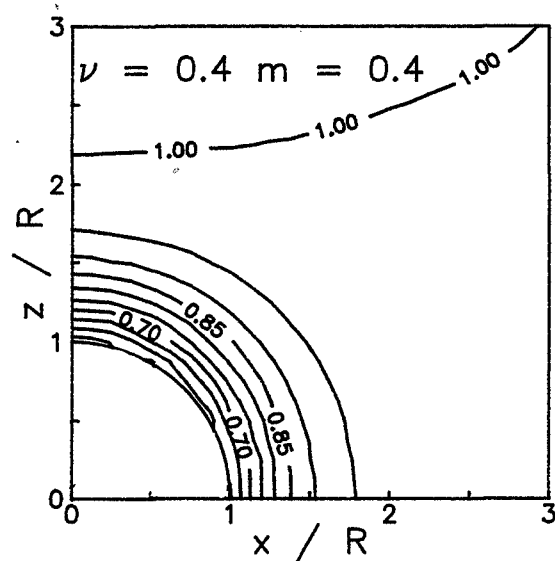
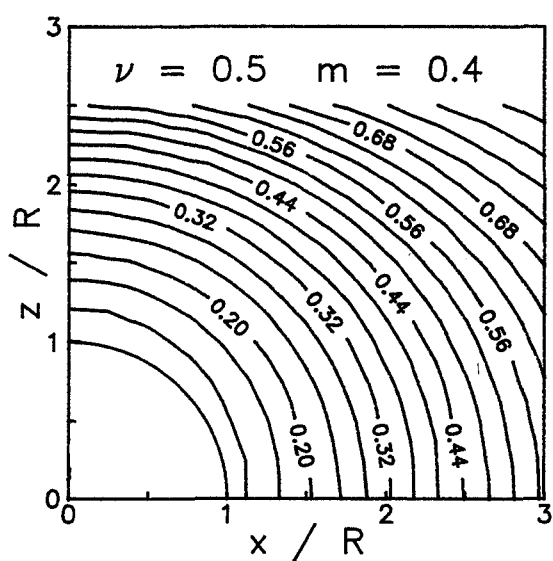
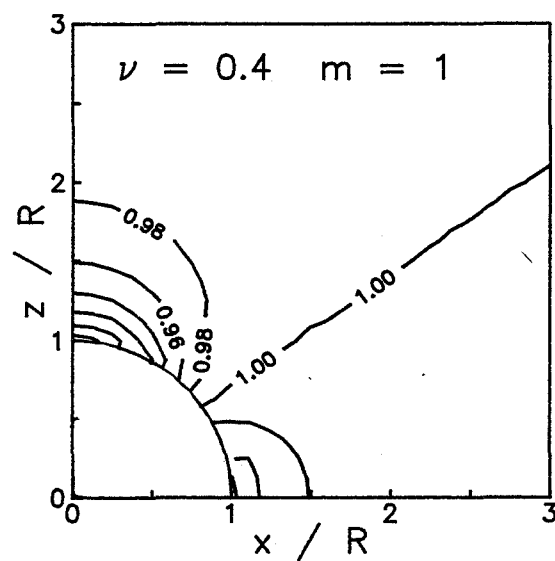
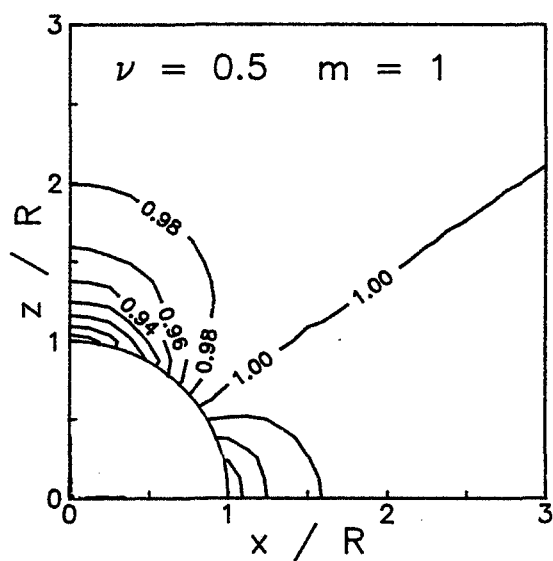
### III.2.3. Etude du champ de contrainte moyenne autour de la cavité

Dans le premier chapitre, nous avons montré que le taux de triaxialité locale n'est pas un bon paramètre en viscoplasticité du fait de la présence de zones mortes caractérisées par  $\dot{\epsilon}_{vm}^\infty = 0$ . Le champ de contrainte moyenne autour de la cavité est une grandeur plus adaptée pour évaluer les risques d'endommagement secondaires.

#### \* Triaxialité faible

La figure 10 présente le champ de contrainte moyenne autour d'une cavité sphérique pour un chargement uniaxial ( $\zeta^\infty = 1/3$ ). On observe la présence d'une zone de compression au pôle de la cavité ainsi qu'un maximum de contrainte de traction sur l'équateur. La forme des courbe isovaleurs est peu affectée lorsque  $m$  décroît. En revanche, une diminution de la sensibilité à la

$$\zeta^{\infty} = 7$$



**Figure 11 :** Courbes isovaleurs de contrainte moyenne autour d'une cavité sphérique pour un chargement fortement triaxial

vitesse accentue fortement l'amplitude des concentrations de contrainte moyenne négative au pôle. La compressibilité atténue cet effet. Ces résultats sont apparents sur le tableau suivant :

Valeurs de  $\sigma_m/\sigma_m^\infty$  au pôle et à l'équateur de la cavité pour  $\zeta^\infty = 1/3$

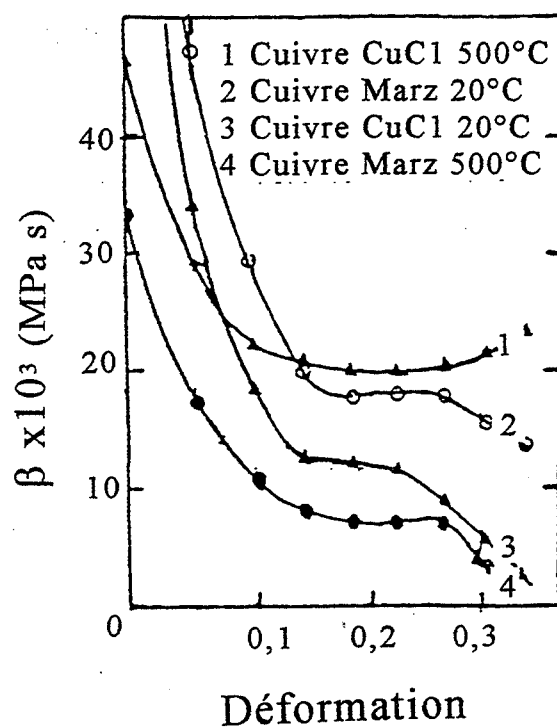
	$\nu = 0,5$		$\nu = 0,4$	
	pôle	équateur	pôle	équateur
$m = 1$	- 2	2,4	-1,7	2,2
$m = 0,4$	-2,8	1,9	-2,2	1,6
$m = 0,1$	-4	1,6	-2,8	1,2

*\* Triaxialité élevée*

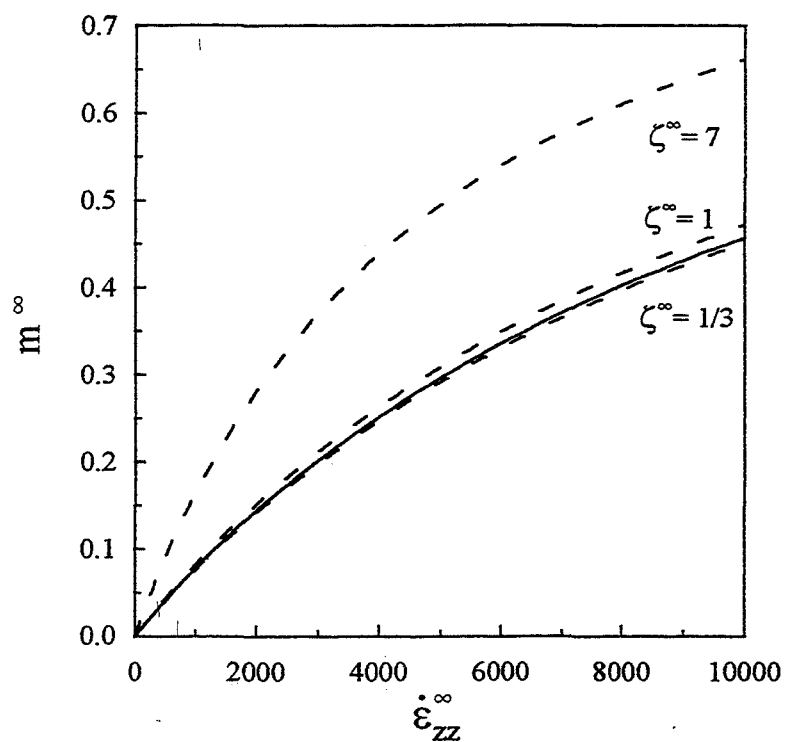
La figure 11 montre le champ de contrainte moyenne autour de la cavité sous une triaxialité de 7.

Pour un comportement newtonien, la forme des courbes évolue peu avec la triaxialité. En revanche, la zone de compression a disparu au profit d'une zone de déficit de la contrainte moyenne.

Lorsque la sensibilité à la vitesse diminue, les courbes deviennent concentriques à la cavité dès  $m = 0,4$ . La répartition de contrainte moyenne autour de la cavité devient de plus en plus concentrique. Un déficit important apparaît autour de la cavité. Dans une matrice incompressible, la contrainte moyenne vaut moins de 10% de celle imposée lorsque  $m = 0,4$ , et moins de 1% lorsque  $m = 0,1$ . Si la matrice est compressible ce déficit est moins accentué : la contrainte moyenne chute de 55% pour  $m = 0,4$  et de 40% pour  $m = 0,1$ . Ces résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous :



**Figure 12 :** Variations du paramètre  $\beta$  de la loi linéaire avec seuil en fonction de la déformation (Giannotta, Thèse, [1986])



**Figure 13 :** Evolution du coefficient de sensibilité à la vitesse en fonction du chargement imposé pour un matériau incompressible (trait continu) et compressible avec  $\nu = 0,4$  (traits interrompus)

Valeurs de  $\sigma_m / \sigma_m^\infty$  au pôle et à l'équateur de la cavité pour  $\zeta^\infty = 7$

	$\nu = 0,5$		$\nu = 0,4$	
	pôle	équateur	pôle	équateur
$m = 1$	0,85	1,07	0,87	1,06
$m = 0,4$	0,11	0,1	0,53	0,63
$m = 0,1$	0,002	0,002	0,38	0,4

La forme du champ autour de la cavité, lorsque la sensibilité à la vitesse décroît, explique la diminution de l'excentricité asymptotique et donc la diminution d'anisotropie induite. Cet effet est moins important lorsque la matrice est compressible, ce qui explique les valeurs d'excentricité asymptotique plus importantes obtenues.

### III.3. Comportement linéaire avec seuil compressible

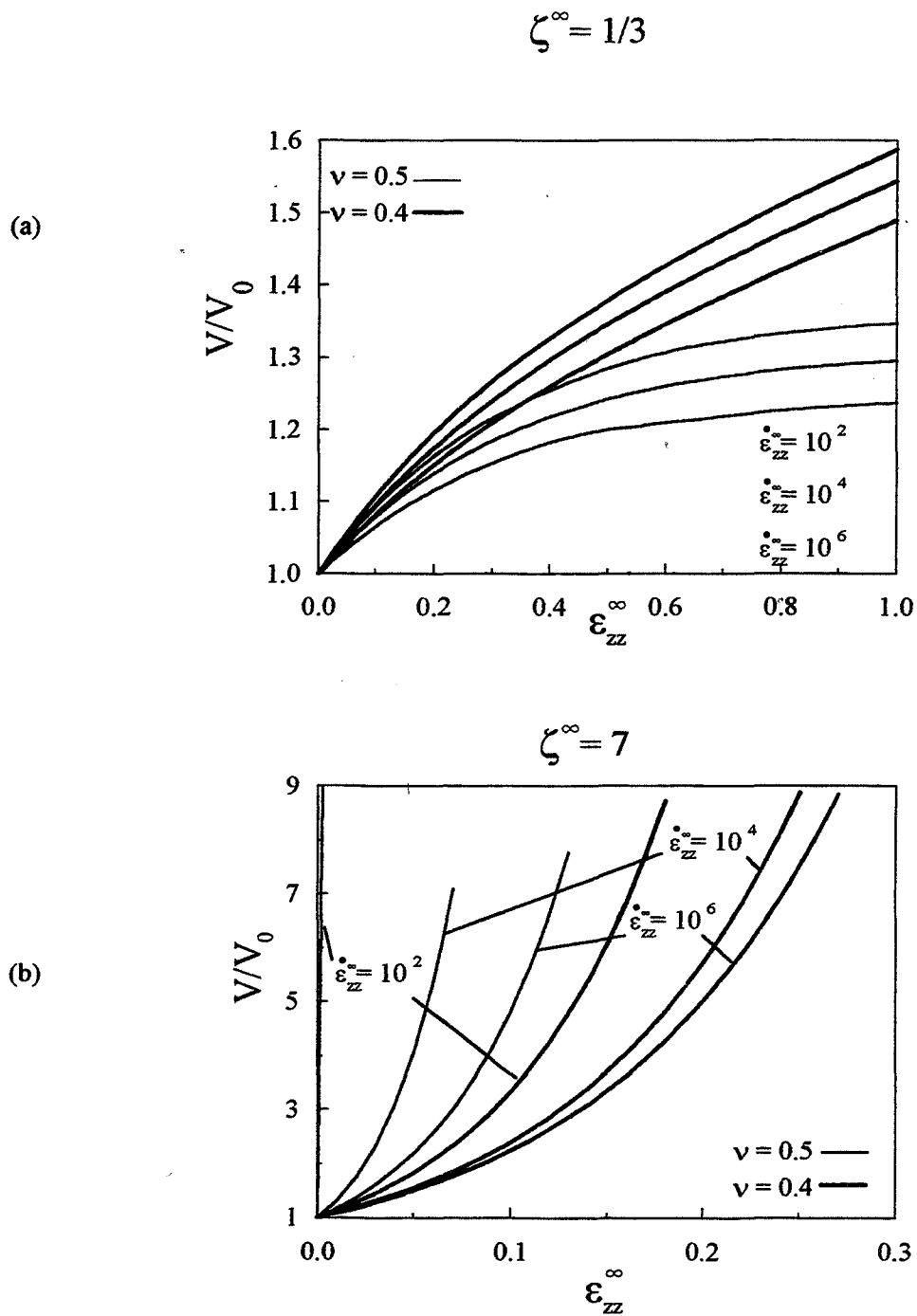
Dans cette section, nous examinons l'influence d'une loi de comportement linéaire avec seuil sur la croissance d'une cavité isolée :

$$\bar{\sigma}_{\dot{\epsilon}_q} = \sigma_0 + \beta \dot{\epsilon}_{\dot{\epsilon}_q}$$

GIANNOTTA [1986] a étudié plusieurs types de cuivre sollicités par de grandes vitesses de déformation. Il a montré que le cuivre adopte un comportement linéaire avec seuil dans le domaine dynamique. Les coefficients  $\sigma_0$  et  $\beta$  dépendent de la déformation. La figure 12 montre cette dépendance pour le coefficient  $\beta$ . Pour des déformations comprises entre 0,1 et 0,3, on observe la présence d'un palier où  $\beta$  reste constant. Dans la suite, nous supposons  $\sigma_0$  et  $\beta$  indépendants de la déformation, en prenant pour valeurs celles du palier pour le cuivre CuCl :

$$\sigma_0 = 190 \text{ MPa et } \beta = 0,016 \text{ MPa s} \quad (37)$$





**Figure 14 :** Croissance d'une cavité initialement sphérique dans une matrice linéaire avec seuil pour une triaxialité imposée de  $1/3$  (a) et de  $7$  (b) pour  $S > T$

Pour ce comportement, le coefficient de sensibilité à la vitesse à l'infini défini par  $m^\infty = \left( \frac{\partial \ln \bar{\sigma}_{\dot{\epsilon}_{eq}^\infty}}{\partial \ln \dot{\epsilon}_{eq}^\infty} \right)_{\bar{\epsilon}_{eq}^\infty} = \frac{\beta \dot{\epsilon}_{eq}^\infty}{\sigma_0 + \beta \dot{\epsilon}_{eq}^\infty}$  augmente avec la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}_{eq}^\infty$ . Pour un chargement imposé  $(\zeta^\infty, \dot{\epsilon}_{zz}^\infty)$ ,  $m^\infty$  dépend, par  $\dot{\epsilon}_{eq}^\infty$ , de la triaxialité imposée ainsi que de la *compressibilité* de la matrice :

$$m^\infty = \frac{3\beta y \sqrt{y^2 + \zeta^{\infty 2}} \dot{\epsilon}_{zz}^\infty}{(\zeta^\infty + 3y^2)\sigma_0 + 3\beta y \sqrt{y^2 + \zeta^{\infty 2}} \dot{\epsilon}_{zz}^\infty} \quad (38)$$

Lorsque la matrice est endommagée, le coefficient de sensibilité à la vitesse à l'infini augmente avec la triaxialité (Figure 13). Cette figure montre que la variation de  $m^\infty$  entre les comportements incompressible et compressible ( $\nu = 0,4$ ) pour un chargement donné n'est importante qu'aux grandes triaxialités.

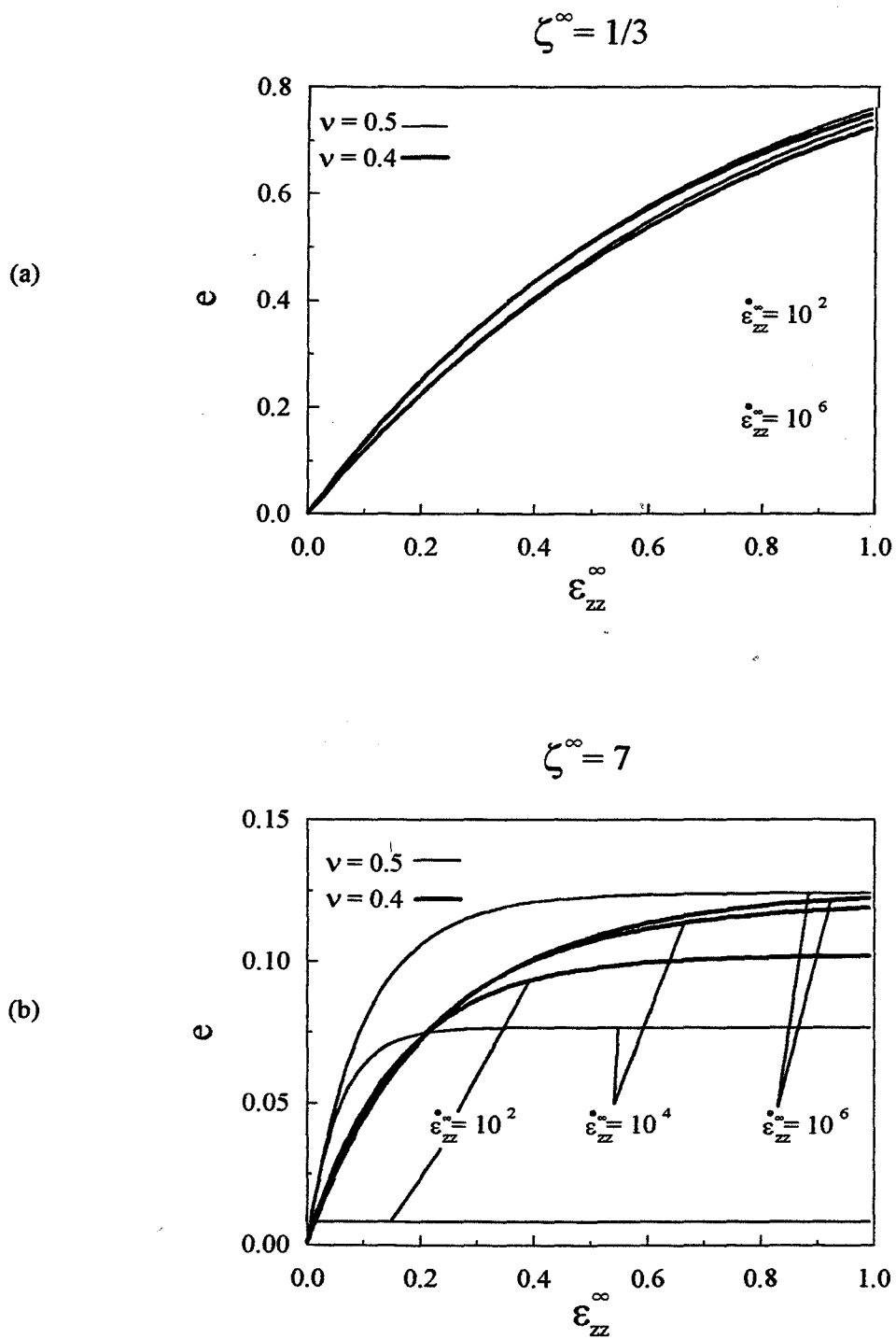
Dans la suite, trois vitesses de déformation axiales sont imposées :  $\dot{\epsilon}_{zz}^\infty = 10^2$ ,  $10^4$  et  $10^6$  s<sup>-1</sup>. Les sensibilités à la vitesse correspondantes sont alors :

$$\zeta^\infty = 1/3$$

$\dot{\epsilon}_{zz}^\infty \backslash \nu$	0,5	0,4
$10^6$	0,988	0,988
$10^4$	0,457	0,448
$10^2$	0,0083	0,0081

$$\zeta^\infty = 7$$

$\dot{\epsilon}_{zz}^\infty \backslash \nu$	0,5	0,4
$10^6$	0,988	0,995
$10^4$	0,457	0,657
$10^2$	0,0083	0,019



**Figure 15 :** Evolution de l'excentricité d'une cavité initialement sphérique dans une matrice linéaire avec seuil pour une triaxialité imposée de 1/3 (a) et de 7 (b) pour  $S > T$

Ces vitesses de déformation permettent donc d'obtenir des sensibilités à la vitesse voisines (aux faibles triaxialités) de celles étudiées pour le comportement pseudoplastique compressible. L'influence spécifique de la loi linéaire avec seuil peut alors être mise en évidence. Les faibles vitesses de déformation correspondent à un comportement proche du parfaitement plastique (compressible) alors que les grandes vitesses de déformation induisent un comportement proche du linéaire.

### **III.3.1. Croissance volumique de la cavité**

La croissance d'une cavité initialement sphérique dans une matrice linéaire avec seuil est portée sur la figure 14. Il apparaît que le volume augmente plus vite lorsque la vitesse de déformation diminue. Ceci est à relier directement à la diminution de la sensibilité à la vitesse. De plus, l'influence de la vitesse de déformation imposée augmente avec la triaxialité.

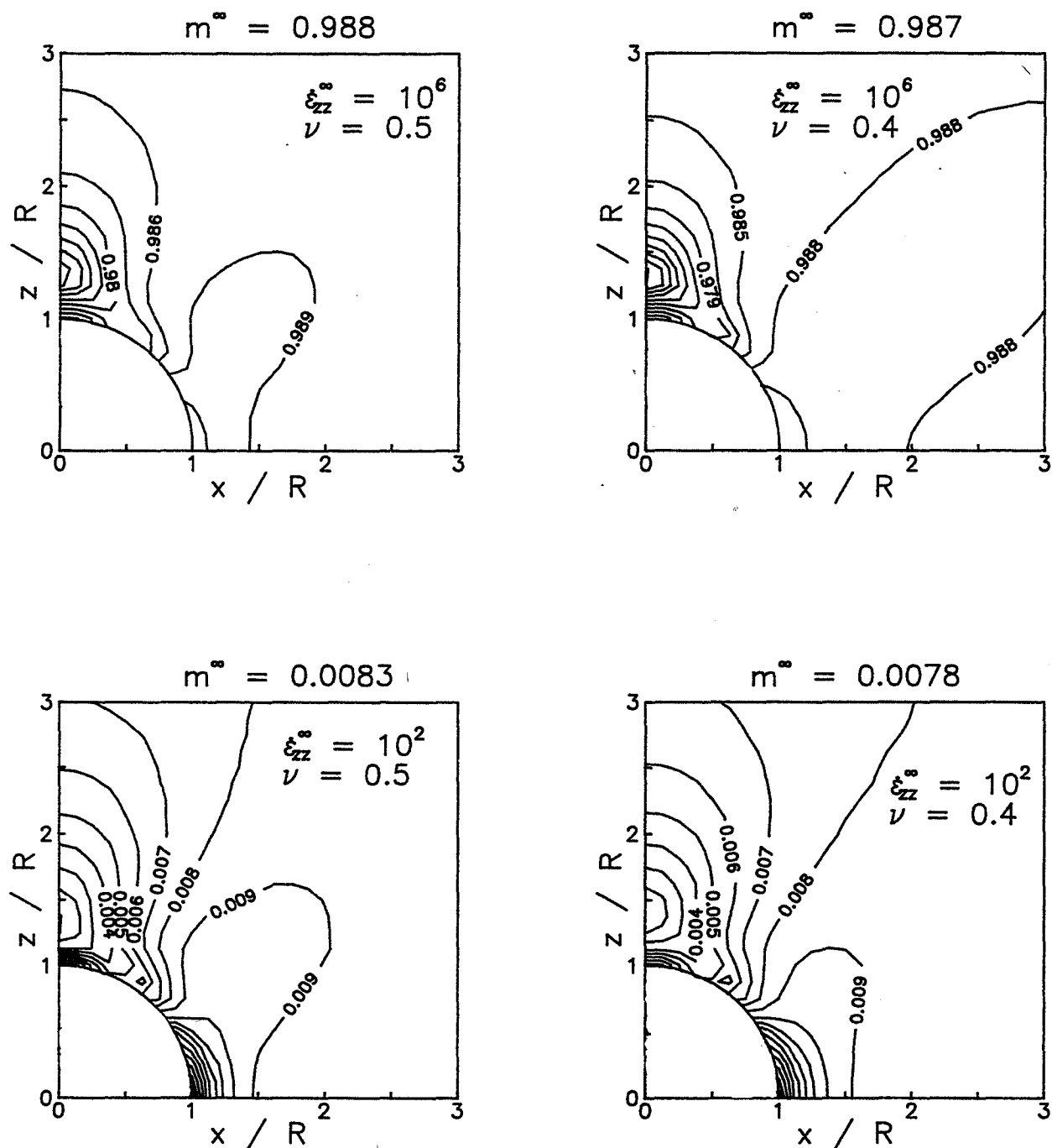
Plus la triaxialité est importante, plus les vitesses de déformation locales autour de la cavité augmentent. Le coefficient de sensibilité à la vitesse local  $m$  croît donc aussi. Les résultats obtenus par l'étude du comportement pseudoplastique permettent de "prévoir" dans ce phénomène un effet stabilisant de la loi linéaire avec seuil. Ceci sera illustré dans la suite à l'aide d'une comparaison des deux comportements pseudoplastique et linéaire avec seuil, ainsi que sur des cartes d'isovaleurs du coefficient de sensibilité à la vitesse.

La compressibilité de la matrice atténue l'effet de la sensibilité à la vitesse de déformation, résultat observé précédemment pour un matériau pseudoplastique. A haute triaxialité, la croissance volumique dans une matrice endommagée est fortement ralentie.

### **III.3.2. Evolution de l'excentricité**

Sur la figure 15 est portée l'évolution de la forme d'une cavité initialement sphérique. A faible triaxialité, l'influence de la vitesse de déformation est négligeable. En revanche, à haute triaxialité, l'excentricité augmente d'autant plus que la vitesse de déformation est plus grande. Ces tendances peuvent à nouveau s'expliquer par la croissance de  $m$  avec la vitesse de déformation, ainsi que par les résultats obtenus pour le comportement

$$\zeta^\infty = 1/3$$



**Figure 16 :** Courbes isovaleurs du coefficient de sensibilité à la vitesse autour d'une cavité sphérique dans une matrice de comportement linéaire avec seuil ( $\zeta^\infty = 1/3$ )

pseudoplastique (quand  $\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty} \rightarrow \infty$ , le comportement tend vers celui d'un matériau newtonien).

### III.3.3. Courbes isovaleurs du coefficient de sensibilité à la vitesse

Pour mieux comprendre l'influence du comportement linéaire avec seuil sur la croissance de l'endommagement, des isovaleurs de  $m$  ont été tracées pour une triaxialité de 1/3 (Figure 16) et 7 (Figure 17). Rappelons que la forme et les valeurs des courbes isovaleurs de  $m$  sont directement reliées aux courbes d'isovaleurs de vitesse de déformation équivalente car  $m$  augmente avec  $\dot{\epsilon}_{eq}$ . Une chute de  $m$  localement correspond ainsi à une zone de déformation moins importante dans le matériau.

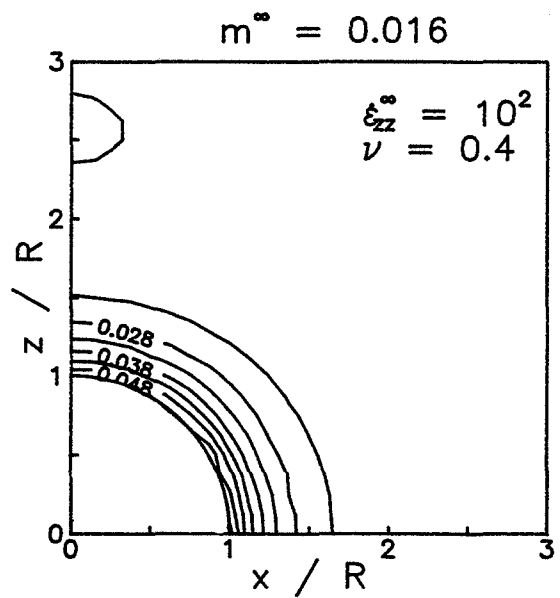
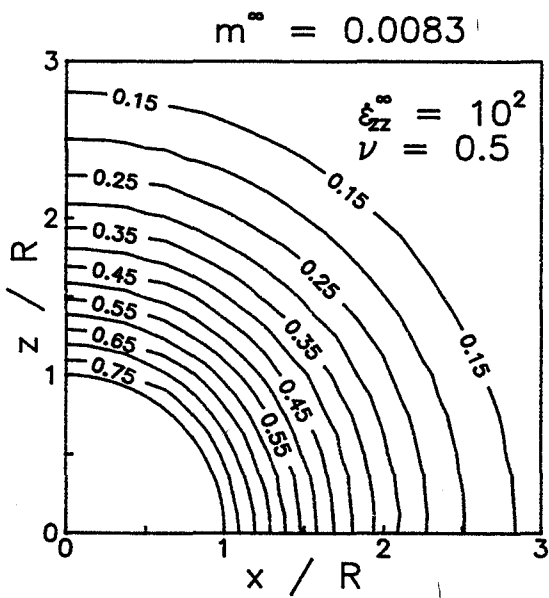
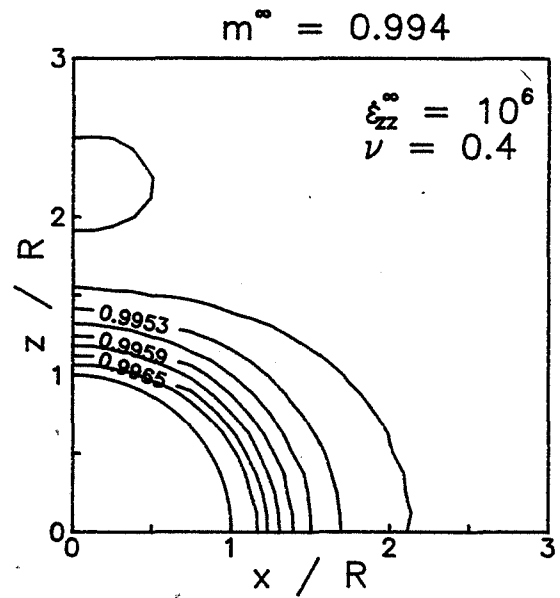
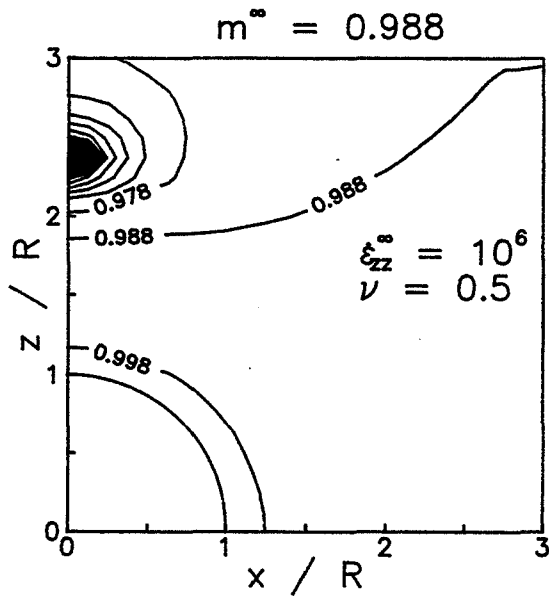
#### \* Triaxialité faible

Pour un chargement uniaxial,  $m$  est équivalent à  $m^{\infty}$  au pôle de la cavité et plus grand à l'équateur. Cependant, devant le pôle de la cavité une diminution de  $m$  est observée, due à une diminution en ce point de la vitesse de déformation. Ces fluctuations sont d'autant plus importantes que  $\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty}$  diminue. Cet effet s'atténue un peu avec la compressibilité du matériau. La forme des courbes isovaleurs est peu modifiée par la compressibilité ou par la vitesse de déformation. Le tableau ci dessous donne les valeurs du coefficient de sensibilité à la vitesse local normé par sa valeur à l'infini, au pôle et à l'équateur de la cavité :

Valeurs de  $m / m^{\infty}$  au pôle et à l'équateur de la cavité pour  $\zeta^{\infty} = 1/3$

	$\nu = 0,5$		$\nu = 0,4$	
	pôle	équateur	pôle	équateur
$\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty} = 10^6$	1,001	1,005	1,001	1,005
$\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty} = 10^2$	1,08	2,2	1,026	2,2

$$\zeta^\infty = 7$$



**Figure 17 :** Courbes isovaleurs du coefficient de sensibilité à la vitesse autour d'une cavité sphérique dans une matrice de comportement linéaire avec seuil ( $\zeta^\infty=7$ )

*\* Triaxialité élevée*

L'augmentation de triaxialité modifie l'allure des courbes. Lorsque  $\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty}$  diminue, deux effets sont observés :

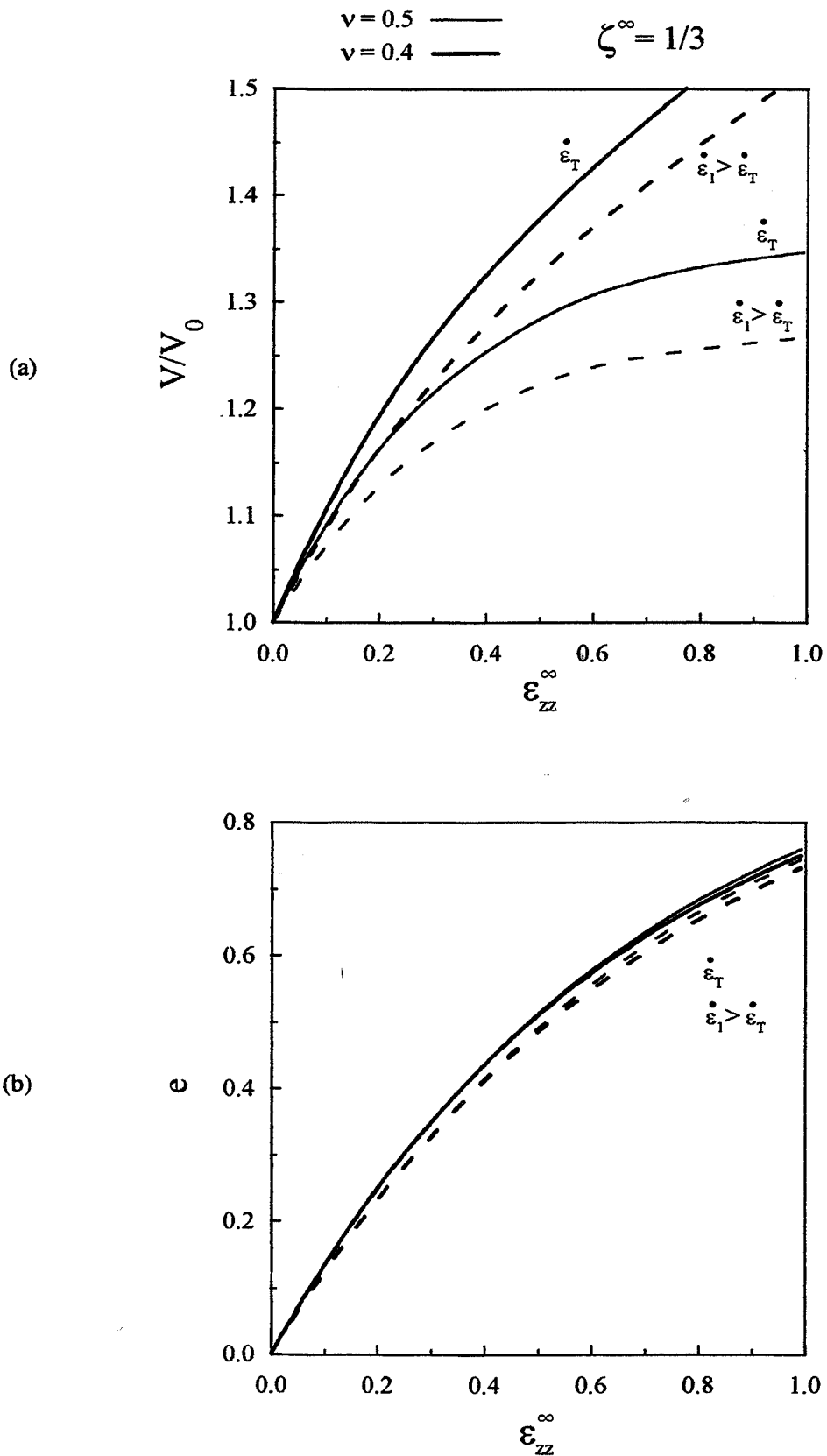
- les courbes deviennent concentriques à la cavité,
- une augmentation très nette de  $m$  est observée au voisinage de la cavité.

Considérons par exemple les courbes à  $\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty} = 10^2 \text{ s}^{-1}$ . Dans une matrice incompressible,  $m^{\infty}$  vaut 0,0083 ;  $m$  dépasse 0,75 à la surface de la cavité. La sensibilité à la vitesse est augmentée d'un facteur voisin de  $10^2$  à proximité de la sphère. Dans ces conditions la cavité "voit" autour d'elle une matrice de comportement proche du linéaire. Dans une matrice compressible cette tendance est amoindrie :  $m$  n'est pas encore totalement uniforme à la surface de la cavité. Il varie entre 0,053 et 0,058 pour  $m^{\infty} = 0,016$  ;  $m$  est donc simplement triplé. Ceci permet de supposer que le rôle stabilisant de la loi linéaire avec seuil est d'autant plus marqué que le comportement est proche de l'incompressible. Les valeurs de  $m$  au pôle et à l'équateur de la cavité sont reportées sur le tableau suivant :

Valeurs de  $m / m^{\infty}$  au pôle et à l'équateur de la cavité pour  $\zeta^{\infty} = 7$

	$\nu = 0,5$		$\nu = 0,4$	
	pôle	équateur	pôle	équateur
$\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty} = 10^6$	1,01	1,01	1,003	1,005
$\dot{\epsilon}_{zz}^{\infty} = 10^2$	93	93	3,3	3,6





**Figure 18 :** Influence comparée des comportements linéaire avec seuil (traits interrompus) et pseudoplastique (traits continus) sur la croissance volumique (a) et celle de l'excentricité (b) pour une triaxialité de  $1/3$ . Pour une vitesse de déformation égale à la vitesse de transition, la courbe correspondant à la loi linéaire avec seuil est confondue avec celle correspondant à la loi pseudoplastique.  
 ( $\nu = 0.5$  traits fins et  $\nu = 0.4$  traits gras)

### III.4. Comparaison des deux comportements étudiés

La croissance d'une cavité initialement sphérique est portée (Figure 18) en fonction de la déformation longitudinale pour les deux lois de comportement étudiées, sous un chargement uniaxial ( $\zeta^\infty = 1/3$ ). Les valeurs de  $k$ ,  $m$ ,  $\sigma_0$ ,  $\beta$  sont celles du cuivre CuC1 pour une déformation  $\bar{\epsilon}_{vm}^\infty = 0,05$  (annexe III) :  $k = 143 \text{ MPa s}^m$ ,  $m = 0,014$ ,  $\sigma_0 = 150 \text{ MPa}$  et  $\beta = 0,034 \text{ MPa s}$ . Pour le comportement pseudoplastique, il est connu que  $\dot{\epsilon}_{zz}^\infty$  n'a pas d'influence sur la croissance de la cavité. En revanche, pour la loi linéaire avec seuil, deux vitesses de déformation longitudinales ont été imposées. Le premier choix correspond à la vitesse de déformation de transition entre les domaines quasistatique et dynamique  $\dot{\epsilon}_T$  (annexe III) : le coefficient de sensibilité à la vitesse vaut alors  $m^\infty = 0,014$ . Dans ce cas, les courbes de croissance de la cavité dans le matériau pseudoplastique ou dans le matériau linéaire avec seuil sont superposables. Le deuxième chargement est une vitesse de déformation supérieure à  $\dot{\epsilon}_T$  (en l'occurrence :  $\dot{\epsilon}_{zz}^\infty = 10^4$ ). Le rôle stabilisant de la loi linéaire avec seuil apparaît alors (traits interrompus) : la cavité croît moins rapidement. Lorsque la matrice est compressible la même tendance est observée bien que de façon moins prononcée. D'autre part, on observe à nouveau pour une telle triaxialité que l'effet sur l'excentricité est négligeable.

#### IV. Conclusion

Ce chapitre a permis de déterminer les influences du chargement et de la rhéologie de la matrice sur deux ensembles de grandeurs :

- \* l'évolution de la géométrie de la cavité en fonction de la déformation de référence axiale  $\varepsilon_{zz}^{\infty}$  ;
- \* l'évolution des grandeurs mécaniques locales lorsque la vitesse de déformation axiale  $\dot{\varepsilon}_{zz}^{\infty}$  est imposée.

Les tendances observées sont les suivantes :

- \* *Evolution de la géométrie de la cavité*
- \* Lorsque la triaxialité des contraintes croît, le volume de la cavité augmente et son excentricité diminue, quel que soit le comportement de la matrice.
- \* Lorsque le coefficient de sensibilité à la vitesse à l'infini diminue, le volume augmente quelle que soit la compressibilité de la matrice.
- \* La diminution de la sensibilité à la vitesse entraîne une diminution de l'anisotropie induite par l'endommagement. Cet effet s'avère moins important lorsque la matrice est compressible.
- \* En revanche, l'influence de la compressibilité du matériau dépend du taux de triaxialité imposé :
  - à faible triaxialité, une augmentation de la compressibilité entraîne une augmentation de croissance volumique,
  - à haute triaxialité, la compressibilité est stabilisante.
- \* Quelle que soit la triaxialité imposée, lorsque la compressibilité de la matrice augmente, l'influence du coefficient de sensibilité à la vitesse est atténuée.

L'ensemble de ces conclusions est reporté sur le tableau 1.

Tableau I : Evolution géométrique de la cavité

		$V/V_0(\varepsilon_{zz}^\infty)$		$e(\varepsilon_{zz}^\infty)$
$\zeta^\infty$ croît		croît		décroît
$m^\infty$ décroît		croît		décroît
$\kappa$ décroît ( $y$ décroît)	$\zeta^\infty$ faible	croît	diminue l'influence de $m$	diminue l'influence de $m$
	$\zeta^\infty$ grand	décroît		

Tableau II : Evolution des grandeurs mécaniques locales

		$\sigma_m/\sigma_m^\infty$		$m(\bar{r})$	
		forme des isos	valeurs	forme des isos	valeurs
$\zeta^\infty$ croît		$m \ll 1 \rightarrow$ sphérique	maximum décroît fin des zones de compression	$\rightarrow$ sphérique	$m$ croît
$m^\infty$ décroît	$\zeta^\infty$ faible	-	compression augmente au pôle	-	-
	$\zeta^\infty$ grand	$\rightarrow$ sphérique (homogène)	$\frac{\sigma_m(R)}{\sigma_m^\infty} \rightarrow 0^+$	$\rightarrow$ sphérique	$m(R) \rightarrow 1$
$\kappa$ décroît ( $y$ décroît)		-	lisse les contraintes : le champ devient plus homogène	-	$m(R)$ décroît

avec :  $m(R)$  : valeurs de  $m$  proches de la cavité

- : peu d'influence

*\* Evolution des grandeurs mécaniques locales*

- \* L'augmentation de la triaxialité des contraintes, ainsi que la diminution du coefficient de sensibilité à la vitesse rendent les champs plus concentriques autour de la cavité.
- \* La compressibilité de la matrice a peu d'influence sur la *forme* des champs.
- \* L'influence de la triaxialité sur les champs est indépendante de la rhéologie du matériau. Lorsque  $\zeta^\infty$  augmente, la tension hydrostatique normalisée diminue d'une part ; le coefficient de sensibilité à la vitesse augmente aux abords de la cavité (pour une loi linéaire avec seuil) d'autre part, ce qui entraîne une augmentation de stabilité.
- \* L'influence de la sensibilité à la vitesse à l'infini dépend du chargement :
  - à faible triaxialité, une diminution de  $m^\infty$  entraîne une augmentation de la compression aux pôles de la cavité,
  - à haute triaxialité, une diminution de  $m^\infty$  lisse les valeurs des contraintes moyennes autour de la cavité (élimine les zones de compression et atténue les surcontraintes de traction moyenne).
- \* Pour tout chargement et toute sensibilité à la vitesse, la compressibilité de la matrice atténue les pics et creux de contraintes.

L'ensemble de ces conclusions est reporté sur le tableau 2.

*\* Comparaison des comportements compressibles pseudoplastique et linéaire avec seuil*

La comparaison des deux comportements étudiés met en évidence l'effet stabilisant de la loi linéaire avec seuil. Cet effet est expliqué par une augmentation du coefficient de sensibilité à la vitesse autour de la cavité associée à une augmentation des vitesses de déformation. Toutefois, il est amoindri par la compressibilité de la matrice.

## **TROISIEME CHAPITRE**

### **COMPORTEMENT D'UN MATERIAU VISCOPLASTIQUE LINEAIRE ENDOMMAGE**

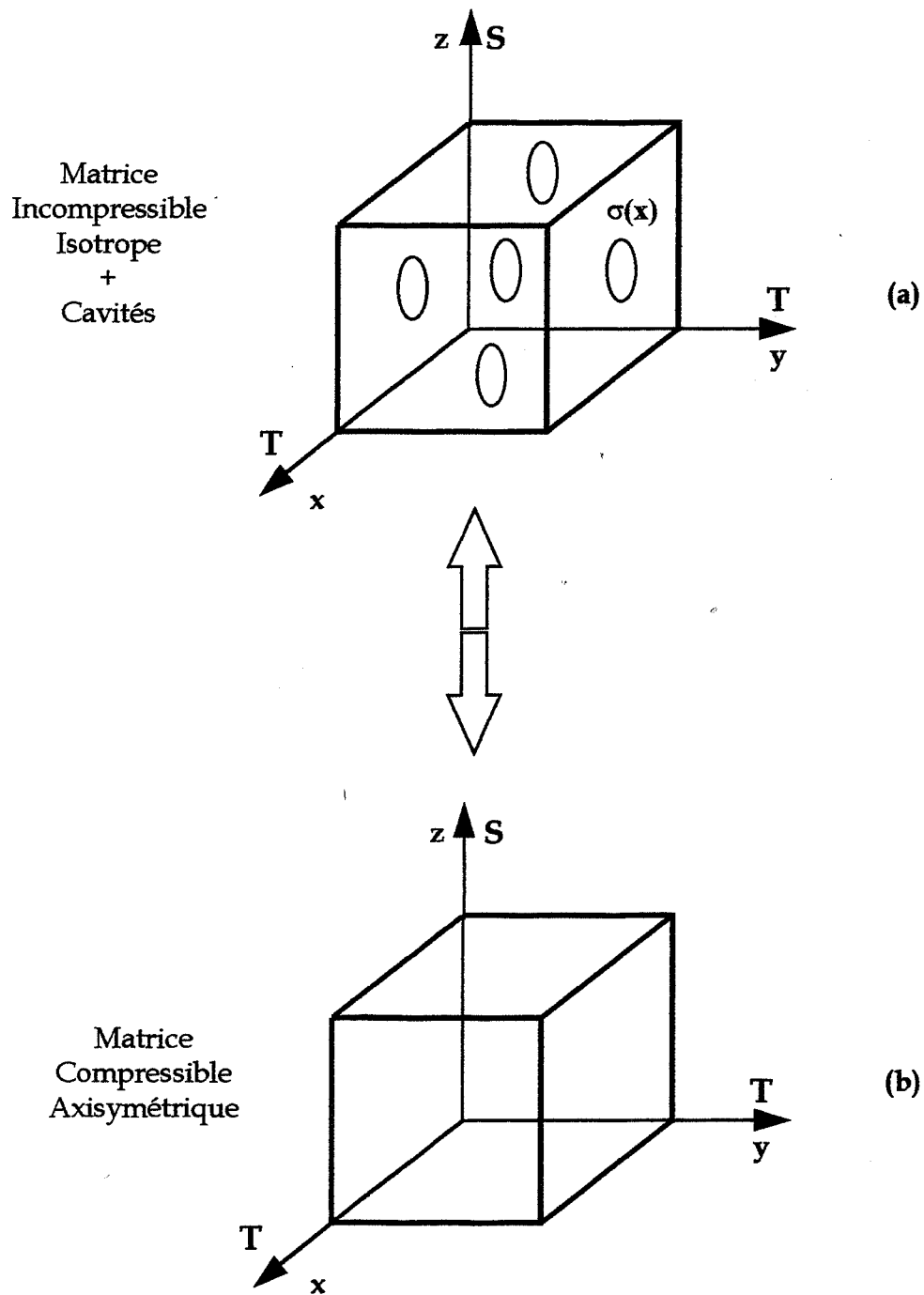


## CHAPITRE III

### COMPORTEMENT D'UN MATERIAU VISCOPLASTIQUE LINEAIRE ENDOMMAGE

I. INTRODUCTION .....	65
II. SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE .....	66
II.1. Représentation d'un matériau hétérogène .....	66
II.2. Définition de la cohérence .....	67
II.3. Encadrements du comportement .....	68
II.4. Estimations du comportement .....	73
II.4.1. Méthode "autocohérente" à deux phases .....	75
II.4.2. Méthode "autocohérente" à trois phases .....	76
II.4.3. Méthode de MORI-TANAKA .....	76
II.4.4. Méthode des solutions diluées .....	77
II.4.5. Méthode différentielle .....	77
II.5. Exemple : matrice isotrope incompressible contenant des cavités sphériques .....	79
III. METHODE DE CALCUL .....	83
III.1. Construction d'un potentiel axisymétrique compressible .....	83
III.1.1. Formulation du comportement axisymétrique et notations .....	
III.1.2. Grandeurs équivalentes et potentiel axisymétrique .....	86
III.1.3. Lien avec le comportement isotrope .....	88
III.2. La méthode différentielle dans le cas axisymétrique .....	88
III.2.1. Présentation .....	88
III.2.2. Conditions initiales .....	89
IV. ANALYSE DES RESULTATS .....	91
IV.1. Evolution des modules en fonction de $\lambda$ et $f$ .....	91
IV.2. Potentiel axisymétrique .....	93
IV.3. Mesure particulière de l'anisotropie : comportement isotrope "le plus proche" .....	94
IV.4. Croissance d'une cavité initialement sphérique dans un matériau axisymétrique compressible linéaire .....	96
IV.5. Evolution de l'endommagement .....	98
V. CONCLUSION.....	101





**Figure 1 :** Principe de l'homogénéisation : sous un chargement donné (ici en contrainte) le volume élémentaire représentatif du matériau hétérogène (a) est remplacé par le matériau homogène (b) de même comportement macroscopique.

## I. Introduction

Les deux chapitres précédents ont permis d'étudier l'influence du comportement (compressible et/ou non linéaire) de la matrice sur la croissance d'une cavité isolée. Il était alors sous-entendu que la compressibilité du matériau global provenait uniquement de la présence d'une fraction volumique de cavités dans la matrice. Ce troisième chapitre est consacré à l'étude de l'influence de cette porosité sur le comportement global du matériau hétérogène initialement isotrope et incompressible. Afin d'estimer la dégradation du matériau, nous aurons recours à des méthodes d'"homogénéisation". Le matériau hétérogène constitué d'une matrice vierge contenant une fraction volumique *donnée* de cavité (Figure 1a) est remplacé par un matériau fictif homogène (Figure 1b) tel que, sous un chargement imposé, les champs de contrainte et de déformation (ou de vitesse de déformation) soient macroscopiquement les mêmes dans les deux structures. Ceci nécessite l'introduction d'un *volume élémentaire représentatif* du matériau hétérogène. Celui-ci doit être grand par rapport à l'échelle des hétérogénéités et petit par rapport à la structure étudiée pour permettre un traitement continu. Selon les hypothèses considérées lors de cette étape d'homogénéisation, le comportement macroscopique obtenu tiendra compte de la fraction volumique des cavités, de leur forme, de leur distribution spatiale, etc.

Nous considérerons des cavités ellipsoïdales de révolution de même forme et de même axe de symétrie  $\bar{e}_z$ , réparties uniformément dans une matrice isotrope viscoplastique linéaire. La dimension individuelle des vides n'intervient pas en tant que telle, seule leur fraction volumique joue un rôle. Lorsque les cavités ne sont pas sphériques, leur présence entraîne une anisotropie d'origine morphologique du matériau endommagé. Le comportement macroscopique est alors axisymétrique (ou isotrope transverse) autour de l'axe  $\bar{e}_z$ .

Pour certaines géométries et chargements particuliers, le comportement exact du matériau hétérogène peut être obtenu. Dans d'autres cas, certaines méthodes d'homogénéisation permettent d'obtenir un encadrement rigoureux du comportement. Les approximations du comportement global que nous obtiendrons devront donc, lorsque des bornes existent, se trouver entre celles-ci. Les méthodes d'estimation du comportement peuvent en général être abordées de deux façons en fonction du chargement imposé (en contrainte ou

en déformation). Il est alors bon de s'assurer de la *cohérence* (cf. II.2) de la méthode en vérifiant si les deux comportements obtenus sont identiques. Toutes les méthodes traitées dans cette partie supposent que les phases sont connectées par une interface parfaite. Cette hypothèse n'est pas restrictive dans notre cas, car la phase inclusionnaire considérée est formée de cavités.

Bien que notre but soit d'étudier l'endommagement d'une matrice viscoplastique, la partie bibliographique présentera les résultats obtenus initialement en élasticité linéaire, le passage à la viscoplasticité linéaire ne posant pas de problème particulier.

## II. Synthèse bibliographique

### II.1. Représentation d'un matériau hétérogène

Précisons tout d'abord les notations utilisées. Les lettres minuscules telles que  $\sigma(\mathbf{x})$  et  $\varepsilon(\mathbf{x})$  sont les contraintes et déformations *locales* du matériau hétérogène. Les capitales  $\Sigma$  et  $\mathbf{E}$  désignent les grandeurs correspondantes macroscopiques, à l'échelle du volume élémentaire représentatif ou V.E.R.

Afin de décrire la géométrie du milieu hétérogène (pour des milieux non périodiques) une description statistique est nécessaire. Ainsi la distribution spatiale des modules d'élasticités locaux  $\mathbf{L}(\mathbf{x})$  est exprimée au moyen de leurs fonctions de corrélation (pour plus de détails, on peut se reporter à FRANÇOIS, PINEAU et ZAOUÏ [1991] ou DENDIEVEL [1992]). Soit  $L_1$  la valeur de  $\mathbf{L}(\mathbf{x})$  au point  $\mathbf{x}_1$  d'un volume élémentaire représentatif donné du matériau hétérogène et  $P_1(L_1)$  sa densité de probabilité :  $P_1(L_1) dL_1$  est la probabilité pour que  $\mathbf{L}(\mathbf{x}_1) = L_1$  à  $dL_1$  près, probabilité prise sur l'ensemble des V.E.R. du composite hétérogène à  $\mathbf{x}_1$  fixé. De même,  $P_2(L_1, L_2) dL_1 dL_2$  est la probabilité pour que  $\mathbf{L}(\mathbf{x}_1) = L_1$  à  $dL_1$  près et  $\mathbf{L}(\mathbf{x}_2) = L_2$  à  $dL_2$  près ; etc. Ceci permet de définir les fonctions de corrélation aux différents ordres en prenant les moyennes d'ensemble :

$$\langle L_1 \rangle = \int L_1 P_1(L_1) dL_1 ; \langle L_1 L_2 \rangle = \int L_1 L_2 P_2(L_1, L_2) dL_1 dL_2 ; \text{etc.} \quad (1)$$

La connaissance de la suite infinie des fonctions de corrélation aux différents ordres permet de décrire parfaitement la géométrie du matériau hétérogène.

Dans la suite, l'hypothèse ergodique est admise. Celle-ci permet d'assimiler les moyennes d'ensemble aux moyennes spatiales sur un V.E.R. :

$$\langle L_1 \rangle = \frac{1}{V} \int_V L(x) dx \quad (2)$$

Considérons un V.E.R. de volume  $V$  et de surface  $\partial V$ . Lorsque des forces  $\sigma \cdot n = \Sigma \cdot n$  sont imposées sur  $\partial V$ , on montre à l'aide du théorème de Gauss que la moyenne des contraintes dans  $V$  est justement égale à  $\Sigma$  :  $\langle \sigma \rangle = \Sigma$ . De même, si les conditions aux limites sont des déplacements associés à une déformation  $E$ , on obtient  $\langle \varepsilon \rangle = E$  (HILL [1965 c]). De plus le théorème de HILL stipule que si  $\sigma$  est un champ de contrainte statiquement admissible et  $u$  un champ de déplacement cinématiquement admissible alors :

$$\langle \sigma : \varepsilon(u) \rangle = \Sigma : E. \quad (3)$$

## II.2. Définition de la cohérence

Considérons un matériau constitué de  $n$  phases. Les méthodes d'homogénéisation sont introduites pour obtenir des estimations ou un encadrement du comportement global, connaissant un certain nombre de paramètres : comportement de chaque phase, fractions volumiques, formes des phases, distribution spatiale, etc. Ces méthodes de moyenne peuvent être mises en œuvre, en général, à l'aide de deux approches duales dépendant des conditions aux limites imposées :

\* Si une déformation macroscopique  $E$  uniforme est imposée, le comportement global  $L_h$  recherché est défini de la façon suivante :

$$\Sigma E = \langle \sigma(x, E) \rangle = L_h : E \quad (4)$$

\* De manière similaire, un tenseur des contraintes  $\Sigma$  uniforme peut être imposé. Le comportement global  $M_h$  recherché est maintenant défini par :

$$E \Sigma = \langle \varepsilon(x, \Sigma) \rangle = M_h : \Sigma \quad (5)$$

*Une méthode d'homogénéisation sera dite cohérente lorsque ces deux approches vérifieront la relation :  $M_h = L_h^{-1}$  (NEMAT-NASSER et HORI [1993]).*

### II.3. Encadrements du comportement

Il est possible, à l'aide du principe de minimum d'énergie élastique, d'obtenir un encadrement du comportement recherché. Lorsque les comportements des différentes phases sont voisins, la connaissance des bornes supérieure et inférieure est suffisante pour caractériser avec une bonne précision le comportement global du matériau hétérogène. L'obtention des bornes d'un comportement exige de pouvoir classer deux tenseurs. La comparaison entre deux tenseurs de rigidité  $L_1$  et  $L_2$  peut se définir à l'aide de la norme suivante :

$$L_1 < L_2 \Leftrightarrow \varepsilon : L_1 : \varepsilon < \varepsilon : L_2 : \varepsilon \quad \forall \varepsilon \quad (6)$$

avec une définition similaire en contrainte pour les souplesses  $M$ . Notons qu'en général tous les tenseurs ne peuvent pas être ordonnés par cette relation.

#### \* Bornes de VOIGT et REUSS

Lorsque les seuls paramètres accessibles du matériau hétérogène sont le comportement et la fraction volumique de chaque phase, un encadrement du comportement global est obtenu à l'aide des bornes de VOIGT et REUSS.

Soit  $\varepsilon^{ca}$  un champ de déformation cinématiquement admissible et  $\varepsilon^{ex}$  la solution exacte du problème. Le principe du minimum d'énergie élastique impose :

$$\langle \varepsilon^{ex} : L : \varepsilon^{ex} \rangle \leq \langle \varepsilon^{ca} : L : \varepsilon^{ca} \rangle \quad (7)$$

VOIGT suppose les déformations uniformes dans le matériau et égales à la déformation imposée  $E$  (elles sont donc cinématiquement admissibles) :

$$E : L_h : E = \langle \varepsilon^{ex} : L : \varepsilon^{ex} \rangle \leq \langle E : L : E \rangle = E : \langle L \rangle : E \quad (8)$$

par définition du comportement exact  $L_h$  cherché. Un raisonnement analogue portant sur l'énergie complémentaire et en supposant les contraintes uniformes dans le matériau donne les bornes de REUSS. Le résultat se résume ainsi :

$$L_R = \langle L^{-1} \rangle^{-1} \leq L_h \leq \langle L \rangle = L_V \quad (9)$$

Il est possible de construire des matériaux dont la solution exacte atteint ces bornes : phases réparties "en série" pour REUSS ou "en parallèle" pour VOIGT.

Ces bornes sont donc les plus resserrées possibles pour les hypothèses considérées ; elles sont dites *optimales*. Le résultat obtenu concerne les formes quadratiques associées à  $L_R$  et  $L_V$ . Il est possible d'en déduire des encadrements des composantes dans certains cas. Dans le cas isotrope, ces bornes s'appliquent directement aux deux composantes  $\kappa$  et  $G$ . En revanche, ce ne sont pas des bornes pour  $E$  et  $\nu$ . Par ailleurs, le fait de se restreindre au comportement isotrope constitue une hypothèse supplémentaire et ces bornes ne sont alors plus optimales. Des bornes plus précises peuvent être obtenues.

*\* Bornes de HASHIN-SHTRIKMAN*

En supposant que le matériau est macroscopiquement isotrope, ces auteurs ont obtenu des bornes plus resserrées que les précédentes au moyen d'un principe variationnel (HASHIN et SHTRIKMAN [1963]). Soit un matériau hétérogène, de comportement  $L(\mathbf{x})$ , de volume  $V$  soumis sur sa surface à des déplacements compatibles avec une déformation  $E$  uniforme dans  $V$ . Le comportement homogène  $L_h$  est défini par la relation (4). L'idée consiste à comparer le matériau réel à un matériau homogène de comportement  $L_0$ , ayant une tension de polarisation  $\tau(\mathbf{x})$  défini par  $\tau = (L - L_0) : \varepsilon$ . Les contraintes dans ce matériau de comparaison s'écrivent alors :  $\sigma = L_0 : \varepsilon + \tau$ . Lorsque  $\tau$  est connue,  $\varepsilon$  peut se calculer à l'aide des fonctions de Green :  $\varepsilon = E - \Gamma : \tau$  où  $-\Gamma$  est un opérateur linéaire produisant, avec  $\tau$ , une déformation associée à un déplacement nul à la surface du V.E.R. et pour laquelle la contrainte est en équilibre :  $\text{div } \sigma = \text{div } (L_0 : \varepsilon + \tau) = 0$  :

$$\Gamma : \tau = \int_V \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') : \tau(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (10)$$

avec

$$\Gamma_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\partial^2 G_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial x_i \partial x'_l}$$

$G$  : fonction de Green du matériau homogène de comparaison

L'équation suivante est alors obtenue pour la contrainte de polarisation  $\tau$  :

$$(L - L_0)^{-1} : \tau + \Gamma : \tau = E \quad (11)$$

Cette équation écrite en fonction de la déformation  $\varepsilon$ , au lieu de la contrainte de polarisation  $\tau$ , correspond à l'équation de Lippmann-Schwinger. Les

tenseurs  $\Gamma$  et  $(L - L_0)^{-1}$  étant auto-adjoints, cette dernière équation est alors équivalente au principe variationnel suivant :

$$\delta\{(\tau, (L - L_0)^{-1} : \tau) + (\tau, \Gamma : \tau) - 2 (\tau, E)\} = \delta\{F(\tau)\} = 0 \quad (12)$$

où  $(f, g) = \frac{1}{V} \int_V f : g dV.$

HASHIN et SHTRIKMAN ont démontré que la valeur extrême de la fonctionnelle définie par (11)  $F(\tau)$  est :  $E : (L_0 - L_h) : E$ . Le principe variationnel proposé par HASHIN et SHTRIKMAN prend finalement la forme suivante :

$$E : (L_0 - L) : E \leq (\tau, (L - L_0)^{-1} : \tau) + (\tau, \Gamma : \tau) - 2 (\tau, E) \quad (13)$$

( $\geq$ )

si  $(L - L_0)$  est défini positif (défini négatif).

Les auteurs ont appliqué ce principe variationnel à un composite *globalement isotrope* contenant des phases isotropes de formes et d'orientations quelconques en prenant comme tenseur de polarisation un tenseur constant par morceaux :  $\tau(x) = \sum \chi_r \tau_r$  où  $\chi_r$  est la fonction indicatrice de la phase  $r$ . Les bornes sont obtenues en prenant pour  $L_0$  le comportement de la phase la plus dure ou celui de la phase la plus molle. Ces bornes s'appliquent donc uniquement dans le cas où la même phase a les coefficients les plus élevés ou les plus faibles. En 1966, WALPOLE a étendu ces bornes au cas où ils appartiennent à des constituants différents.

En 1977, WILLIS a proposé une interprétation nouvelle des bornes de HASHIN-SHTRIKMAN en les reliant aux fonctions de corrélation à deux points, ce qui permet de les situer dans le cadre plus vaste du désordre gradué proposé par KRÖNER [1977].

Pour un composite formé de deux phases isotropes ces bornes peuvent s'écrire de la façon suivante (GILORMINI [1992]) mettant en évidence une grande similarité entre les différentes formes ( $f$  étant la fraction volumique de la phase 1) :

$$\min(\kappa_a, \kappa_b) \leq \kappa_h \leq \max(\kappa_a, \kappa_b) \text{ et } \min(G_a, G_b) \leq G_h \leq \max(G_a, G_b) \quad (14)$$

$$\text{avec} \quad \kappa_a = \kappa_1 + (1-f) \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{1+f \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1 + \frac{4}{3}G_1}} \text{ et } \kappa_b = \kappa_1 + (1-f) \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{1+f \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1 + \frac{4}{3}G_2}}$$

si  $(G_1 - G_2)(\kappa_1 - \kappa_2) \geq 0$  (HASHIN et SHTRIKMAN [1963]) :

$$G_a = G_1 + (1-f) \frac{G_2 - G_1}{1+f \frac{G_2 - G_1}{G_1 + \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{10}{G_1} + \frac{10}{9\kappa_1 + 8G_1}}}} \text{ et } G_b = G_1 + (1-f) \frac{G_2 - G_1}{1+f \frac{G_2 - G_1}{G_1 + \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{10}{G_2} + \frac{10}{9\kappa_2 + 8G_2}}}}$$

si  $(G_1 - G_2)(\kappa_1 - \kappa_2) \leq 0$  (WALPOLE [1966]) :

$$G_a = G_1 + (1-f) \frac{G_2 - G_1}{1+f \frac{G_2 - G_1}{G_1 + \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{10}{G_1} + \frac{10}{9\kappa_2 + 8G_1}}}} \text{ et } G_b = G_1 + (1-f) \frac{G_2 - G_1}{1+f \frac{G_2 - G_1}{G_1 + \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{10}{G_2} + \frac{10}{9\kappa_1 + 8G_2}}}}$$

En 1985, FRANCFORT et MURAT ont construit un composite, constitué de couches orientées suivant un nombre fini de directions, dont ils peuvent calculer le comportement exact. Celui-ci atteint justement les bornes proposées (à la fois pour  $\kappa$  et  $G$ ) par HASHIN et SHTRIKMAN. Celles ci sont donc optimales. En revanche, les bornes proposées par WALPOLE ne sont pas optimales pour le coefficient de cisaillement. En effet, MILTON et PHAN THIEN [1982] ont obtenus dans ce cas des bornes encore plus resserrées (bien que faiblement) que celles de WALPOLE. Leur caractère optimal n'est cependant pas démontré. Elles s'écrivent de la façon suivante [les bornes pour  $\kappa$  sont toujours données par l'équation (14a)] :

$$fG_1 + (1-f)G_2 - \frac{6f(1-f)(G_1 - G_2)^2}{6[fG_2 + (1-f)G_1] + A} \leq G_h \leq fG_1 + (1-f)G_2 - \frac{6f(1-f)(G_1 - G_2)^2}{6[fG_2 + (1-f)G_1] + B}$$

$$\text{avec} \quad A = \max_{t \in [0,1]} \frac{\frac{1}{G_2} \left\langle \frac{2}{\kappa} + \frac{21}{G} \right\rangle_t + 40 \left\langle \frac{1}{G} \right\rangle_t \left\langle \frac{1}{\kappa} \right\rangle_t}{3 \left[ 56 \left\langle \frac{1}{\kappa} \right\rangle_t + 48 \left\langle \frac{1}{G} \right\rangle_t + 15 \frac{1}{G_2} \right]} \quad (15)$$



$$B = \max_{t \in [0,1]} \frac{24 G_1 \langle 6\kappa + 4G \rangle_t + 45 \langle G \rangle_t \langle \kappa \rangle_t}{21 \langle \kappa \rangle_t + 2 \langle G \rangle_t + 40 G_1}$$

et  $\langle \alpha \rangle_t = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2$

Les bornes présentées jusqu'ici donnent un rôle symétrique aux différentes phases : la présence d'une phase matrice n'est pas prise en compte. A l'aide de ce complément d'information, STOLZ et ZAOUI [1991] ont calculé des bornes encore plus précises.

HILL [1964] a montré que le comportement d'un composite, formé de cylindres de section circulaire parallèles et de comportements axisymétriques, ne dépend plus que de trois paramètres (au lieu de cinq dans le cas général), puisque l'on a les deux relations suivantes (les notations utilisées ci-dessous sont présentées dans la deuxième partie de ce chapitre) :

$$l_h = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{k_2 - k_1} (k_h - k_1) ; n_h = f n_1 + (1-f) n_2 + \left( \frac{l_2 - l_1}{k_2 - k_1} \right)^2 (k_h - f k_1 - (1-f) k_2) \quad (16)$$

En 1969, WALPOLE a déterminé des bornes pour un tel matériau composite (bornes déjà proposées par HILL [1964] et HASHIN [1965] pour des composants isotropes). Ces bornes peuvent se présenter de la façon suivante (GILORMINI [1992]) :

$$\begin{aligned} \min(p_a, p_b) \leq p_h \leq \max(p_a, p_b) ; \min(k_a, k_b) \leq k_h \leq \max(k_a, k_b) \\ \min(m_a, m_b) \leq m_h \leq \max(m_a, m_b) \end{aligned} \quad (17)$$

avec  $p_a = p_1 + (1-f) \frac{p_2 - p_1}{1 + f \frac{p_2 - p_1}{2p_1}} ; p_b = p_1 + (1-f) \frac{p_2 - p_1}{1 + f \frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1}}$

$$k_a = k_1 + (1-f) \frac{k_2 - k_1}{1 + f \frac{k_2 - k_1}{m_1 + k_1}} ; k_b = k_1 + (1-f) \frac{k_2 - k_1}{1 + f \frac{k_2 - k_1}{m_2 + k_1}}$$

si  $(k_1 - k_2) (m_1 - m_2) \geq 0$  alors

$$m_a = m_1 + (1-f) \frac{m_2 - m_1}{1 + f \frac{m_2 - m_1}{m_1 + \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{2}{k_1}}}} ; m_b = m_1 + (1-f) \frac{m_2 - m_1}{1 + f \frac{m_2 - m_1}{m_1 + \frac{1}{\frac{1}{m_2} + \frac{2}{k_2}}}}$$

si  $(k_1 - k_2) (m_1 - m_2) \leq 0$  alors

$$m_a = m_1 + (1-f) \frac{m_2 - m_1}{1 + f \frac{m_2 - m_1}{m_1 + \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{2}{k_2}}}} ; m_b = m_1 + (1-f) \frac{m_2 - m_1}{1 + f \frac{m_2 - m_1}{m_1 + \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{2}{k_1}}}}$$

Le cas d'un matériau composite contenant des ellipsoïdes entièrement aplatis dit laminaire a également été étudié par WALPOLE [1969]. Pour cette géométrie, la solution exacte est obtenue :

$$k_h = f k_1 + (1-f) k_2 - f(1-f) \frac{(l_2 - l_1)^2}{f n_2 + (1-f) n_1} \quad (18)$$

$$l_h = \frac{f l_1 n_2 + (1-f) l_2 n_1}{f n_2 + (1-f) n_1} ; n_h = \frac{n_1 n_2}{f n_2 + (1-f) n_1}$$

$$m_h = f m_1 + (1-f) m_2 ; p_h = \frac{p_1 p_2}{f p_2 + (1-f) p_1}$$

WILLIS [1977] a calculé des bornes pour des phases ellipsoïdales de révolution pour l'étude de la conductivité thermique. EN 1992, WENG les a explicitées dans le cas de l'élasticité linéaire.

En ce qui concerne ce travail, le matériau hétérogène dont nous cherchons le comportement global est un biphasé de nature un peu spéciale : il est constitué d'une phase viscoplastique linéaire incompressible isotrope et de cavités. Les bornes obtenues pour ce type de biphasés sont très éloignées les unes des autres. Il est alors intéressant de rechercher une approximation du comportement à l'aide de méthodes d'homogénéisation (tout en vérifiant si possible que celle-ci se situe bien entre les bornes connues). Dans la suite de ce chapitre, nous ne nous intéresserons qu'au seul cas des biphasés.

#### II.4. Estimations du comportement

L'ensemble des méthodes proposées par la suite nécessite la résolution préalable du problème suivant, souvent appelé "problème auxiliaire" dans la littérature (HILL [1965 a], WALPOLE [1969] par exemple) :

Considérons une inclusion isolée, de forme quelconque, dans une matrice de comportement différent et soumise à un chargement uniforme à l'infini. L'inclusion et la matrice sont supposées, pour l'instant, homogènes et de comportements respectifs (rigidités)  $L_1$  et  $L_2$ . Pour  $E$  imposé, la résolution du problème de localisation nécessite l'introduction du tenseur de localisation  $A_1$ . Celui-ci exprime la déformation moyenne dans l'inclusion  $\varepsilon_1$  en fonction de la déformation uniforme à l'infini  $E$  :  $\varepsilon_1 = A_1 : E$  :

$$A_1 = [I + P_2 : (L_1 - L_2)]^{-1} \quad (19)$$

$P_2$  étant le tenseur de polarisation introduit par HILL [1965 a].

Lorsque l'inclusion est supposée ellipsoïdale, la déformation  $\varepsilon_1$  est uniforme et le tenseur de polarisation s'exprime en fonction du tenseur d'Eshelby :

$$P_2 = S_2 : M_2 = S_2 : L_2^{-1} \quad (20)$$

où  $S_2$  est le tenseur d'Eshelby calculé dans la matrice  $L_2$  (chapitre I).

$P_2$  dépend uniquement du comportement de la matrice et de la forme de l'inclusion (mais pas de son comportement). Notons que le tenseur d'Eshelby (solution d'un problème concernant un matériau homogène contenant des déformations propres anélastiques) n'a pas en général la propriété de symétrie diagonale ( $S_{ijkl} \neq S_{klij}$ ). En revanche le tenseur de polarisation  $P$  a cette propriété, comme le montre HILL [1965 a] à l'aide du théorème de Betti.

Pour une déformation uniforme imposée à l'infini, la déformation, homogène dans l'inclusion ellipsoïdale de révolution (ESHELBY [1957]), est donc connue à l'aide de la formule ci-dessus.

Il est possible, comme nous l'avons dit précédemment, de faire une démarche équivalente en imposant des contraintes uniformes à l'infini : on définit alors le tenseur de localisation  $B_1$  par :  $\sigma_1 = B_1 : \Sigma$ , avec :

$$B_1 = [I + Q_2 : (M_1 - M_2)]^{-1} \quad (21)$$

Les tenseurs  $P_2$  et  $Q_2$  sont liés par la relation suivante  $P_2 : L_2 + M_2 : Q_2 = I$ . Lorsque la cavité est ellipsoïdale de révolution, on peut donc calculer  $Q_2$  à l'aide du tenseur d'Eshelby :  $Q_2 = L_2 : (I - S_2)$ .

Le problème auxiliaire étant résolu, nous présentons maintenant différentes méthodes d'homogénéisation permettant d'estimer le comportement global  $L_h$  du matériau hétérogène. La différence entre ces méthodes provient

du choix de la matrice (une des phases, matériau homogénéisé recherché, etc.) ou du chargement imposé lors du problème auxiliaire.

#### II.4.1. Méthode "autocohérente" à deux phases

Notons tout d'abord que le terme "à deux phases" concerne l'hypothèse de localisation et non le nombre de phases en présence dans le matériau hétérogène. L'hypothèse de ce modèle consiste à considérer que la moyenne des déformations (ou la moyenne des contraintes) dans chaque phase peut être évaluée en considérant une inclusion dans une matrice infinie ayant le comportement recherché (Figure 2a). HILL [1965 a] montre l'autocohérence de la méthode lorsque les phases peuvent être assimilées à des ellipsoïdes de même forme et alignés suivant le même axe. Pour une déformation uniforme  $\mathbf{E}$  imposée, la moyenne des déformations implique :

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = f \boldsymbol{\varepsilon}_1 + (1 - f) \boldsymbol{\varepsilon}_2 = f \mathbf{A}_1 : \mathbf{E} + (1 - f) \mathbf{A}_2 : \mathbf{E}$$

$$\text{soit} \quad f \mathbf{A}_1 + (1 - f) \mathbf{A}_2 = \mathbf{I} \quad (22)$$

De même, la moyenne des contraintes donne :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = f \boldsymbol{\sigma}_1 + (1 - f) \boldsymbol{\sigma}_2 = f \mathbf{L}_1 : \mathbf{A}_1 : \mathbf{E} + (1 - f) \mathbf{L}_2 : \mathbf{A}_2 : \mathbf{E} = \mathbf{L}_h : \mathbf{E}$$

$$\text{soit} \quad f \mathbf{L}_1 : \mathbf{A}_1 + (1 - f) \mathbf{L}_2 : \mathbf{A}_2 = \mathbf{L}_h \quad (23)$$

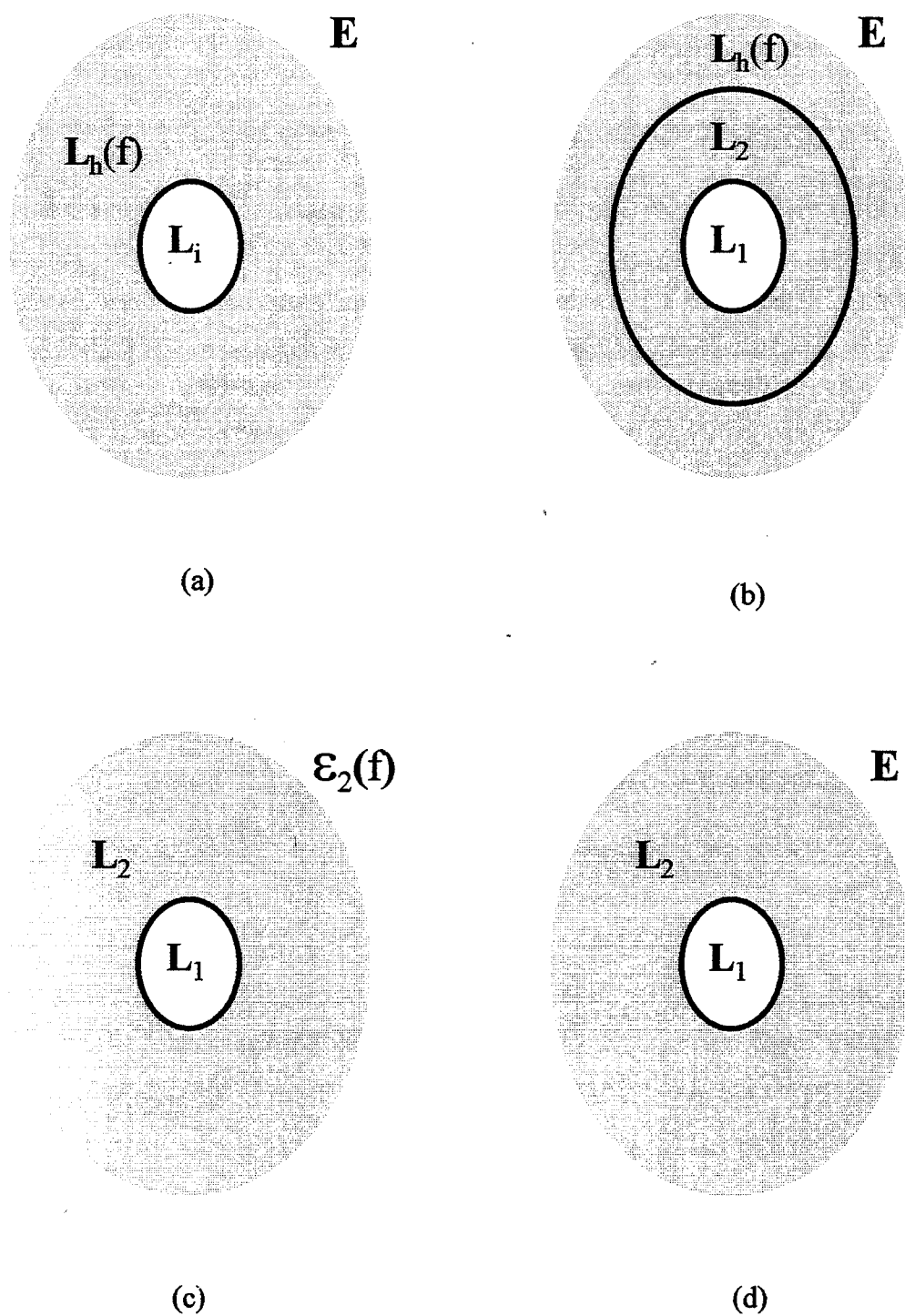
La localisation est effectuée dans une matrice de comportement homogénéisé :  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  dépendent de  $\mathbf{L}_h$ . En écartant le cas où  $f$  tend vers 1, il est possible d'éliminer  $\mathbf{A}_2$  entre les deux équations pour obtenir (WALPOLE [1969]) :

$$\mathbf{L}_h - \mathbf{L}_2 = f (\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2) : \mathbf{A}_1 \quad (24)$$

$$\text{avec} \quad \mathbf{A}_1 = [\mathbf{I} + \mathbf{P}_h : (\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_h)]^{-1}$$

Le tenseur  $\mathbf{P}_h$  est calculé pour une matrice de comportement  $\mathbf{L}_h$  recherché. La moyenne des déformations dans la phase (1) est assimilée à celle calculée dans une inclusion ellipsoïdale de révolution. Le comportement global du matériau est ainsi obtenu de façon *implicite*. Certains cas particuliers peuvent ne pas avoir de solution.

Lorsque les phases ne sont pas de mêmes formes ni de mêmes orientations, les deux équations (22) et (23) ne peuvent être satisfaites



**Figure 2 :** Différentes hypothèses de localisation lors de l'homogénéisation d'un matériau biphasé (phase matrice 2) (a) Méthode "autocohérente" à deux phases ; (b) Méthode "autocohérente" à trois phases ; (c) Méthode de Mori-Tanaka ; (d) Approximation diluée

simultanément. WALPOLE [1969] propose alors de relaxer ces deux équations en faisant intervenir un paramètre (de caractère tensoriel) de pondération des tenseurs de localisation afin de vérifier les deux nouvelles équations obtenues. Ainsi, la localisation  $\varepsilon_\alpha = \mathbf{A}_\alpha : \mathbf{E}$  est remplacée par l'équation suivante  $\varepsilon_\alpha = \mathbf{D} : \mathbf{A}_\alpha : \mathbf{E}$  ( $\alpha = 1, 2$ ). La moyenne des déformations permet alors de calculer ce tenseur  $\mathbf{D}$  :

$$\mathbf{D} = [f \mathbf{A}_1 + (1 - f) \mathbf{A}_2]^{-1} \quad (25)$$

La moyenne des contraintes donne finalement l'estimation du comportement :

$$\mathbf{L}_h = f \mathbf{L}_1 : \mathbf{D} : \mathbf{A}_1 + (1 - f) \mathbf{L}_2 : \mathbf{D} : \mathbf{A}_2 \quad (26)$$

Lors de l'application de cette méthode au cas d'un matériau isotrope constitué de phases isotropes incompressibles,  $\mathbf{D}$  se réduit à un scalaire. Les calculs montrent que ce scalaire reste proche de 1 ; la localisation est donc peu perturbée (MONTHEILLET et GILORMINI [1993]).

#### II.4.2. Méthode "autocohérente" à trois phases

Cette méthode fut proposée initialement par CHRISTENSEN et LO [1979, 1986] lorsqu'une phase matrice existe. Le terme "trois phases" s'applique à l'hypothèse de localisation : l'inclusion est englobée dans une phase matrice, l'ensemble étant inclus dans le matériau homogénéisé (Figure 2b). Ceci semble naturel du fait de la présence d'une phase matrice. Cependant, le calcul s'avère bien plus compliqué et plus lourd que précédemment car la déformation dans l'inclusion n'est plus homogène. Il est nécessaire de déterminer le champ de déformation dans l'inclusion et d'en calculer la moyenne spatiale. Pour cette raison, cette méthode a été appliquée jusqu'à présent uniquement aux inclusions sphériques ou aux cylindres de section circulaire.

#### II.4.3. Méthode de MORI-TANAKA

Cette méthode propose une estimation du comportement lorsque le matériau hétérogène est constitué d'une phase matrice (2) et d'une phase inclusionnaire (1) soumise à  $\mathbf{E}$ . Du fait de la présence d'inclusions, la moyenne des déformations dans la matrice est égale à  $\varepsilon_2$ . Le modèle consiste alors à supposer que la phase inclusionnaire se déforme comme une inclusion dans une

matrice (2) soumise à  $\varepsilon_2$  (Figure 2c). La localisation donne  $\varepsilon_1 = A_1 : \varepsilon_2$  et la moyenne des déformations entraîne :

$$E = f A_1 : \varepsilon_2 + (1 - f) \varepsilon_2$$

d'où 
$$\varepsilon_2 = [f A_1 + (1 - f) I]^{-1} : E \quad (27)$$

La moyenne des contraintes permet finalement d'obtenir l'estimation du comportement global (MORI et TANAKA [1973]) :

$$L_h = [f L_1 : A_1 + (1 - f) L_2] : [f A_1 + (1 - f) I]^{-1} \quad (28)$$

L'avantage de cette méthode est de fournir une solution *explicite* à la différence de la méthode autocohérente à deux phases. Cependant, QIU et WENG [1990] ont montré que pour une dispersion *isotrope* d'inclusions ellipsoïdales la solution sort des bornes de HASHIN-SHTRIKMAN. Dans le cas de biphasés isotropes (dispersion de sphères) ou axisymétriques (cavités ellipsoïdales alignées), ce résultat coïncide avec les bornes supérieure ou inférieure de HASHIN-SHTRIKMAN suivant la phase matrice considérée WENG [1992].

#### II.4.4. Méthode des solutions diluées

Lorsque la phase inclusionnaire (1) est fortement diluée dans la matrice (2), on peut négliger complètement les interactions entre les inclusions (y compris celles prises en compte au moyen d'un champ moyen). La localisation s'effectue sur une inclusion (1) isolée dans une matrice (2) (Figure 2d). L'équation (24) s'écrit :

$$L_h - L_2 = f (L_1 - L_2) : [I + P_2 : (L_1 - L_2)]^{-1} \quad (29)$$

Le comportement obtenu par cette approximation est linéaire en fonction de la fraction volumique  $f$  de phase inclusionnaire. La méthode "autocohérente" à deux phases et la méthode des solutions diluées sont, par construction même, tangentes en  $f = 0$ .

#### II.4.5. Méthode différentielle

Cette méthode a été initialement proposée, selon HASHIN [1983], en 1935 par BRUGGEMAN pour l'étude de la conductivité électrique. BOUCHER

[1974] et MCLAUGHLIN [1977] l'ont ensuite appliquée à l'élasticité. L'idée est d'ajouter un incrément de fraction volumique de phase inclusionnaire à chaque étape d'élaboration du matériau, en utilisant le résultat d'une solution diluée, pour homogénéiser le milieu hétérogène avant l'étape suivante.

Considérons un matériau composite, constitué d'une fraction volumique  $f$  d'inclusions ellipsoïdales de révolution de module  $L_1$  et d'une matrice de module  $L_2$ . Soit  $L(f)$  le module de ce matériau composite.

Soit un deuxième matériau composite, constitué d'une fraction volumique  $f + \delta f$  d'inclusions de module  $L_1$  et de la même matrice de module  $L_2$ , de module global  $L(f + \delta f)$ .

La méthode différentielle propose d'approximer le deuxième matériau par un matériau composite constitué d'un volume unitaire de matrice de module  $L(f)$  dans lequel on ajoute un petit volume  $\delta v$  de phase  $L_1$  (Figure 3). La concentration de phase inclusionnaire ajoutée est donc  $c = [\delta v / (1 + \delta v)]$ . L'hypothèse de la méthode différentielle consiste à appliquer la méthode des solutions diluées pour effectuer le passage de  $L(f)$  à  $L(f + \delta f)$ . L'équation (29) implique alors :

$$\begin{aligned} L(f + \delta f) - L(f) &= \frac{\delta v}{1 + \delta v} [L_1 - L(f)] : A_1(f) \\ &= \frac{\delta v}{1 + \delta v} [L_1 - L(f)] : \{I + P(f) : [L_1 - L(f)]\}^{-1} \end{aligned} \quad (30)$$

où  $P(f)$  est le tenseur de polarisation de la phase 1 calculé dans le matériau composite de comportement  $L(f)$ . Le composite initial, de volume unitaire contient un volume  $f$  de phase 1. On lui rajoute un volume  $\delta v$  de phase 1, la concentration totale de phase 1 est alors  $(f + \delta v) / (1 + \delta v)$  et est égale par définition à  $f + \delta f$ . On obtient ainsi la relation suivante :

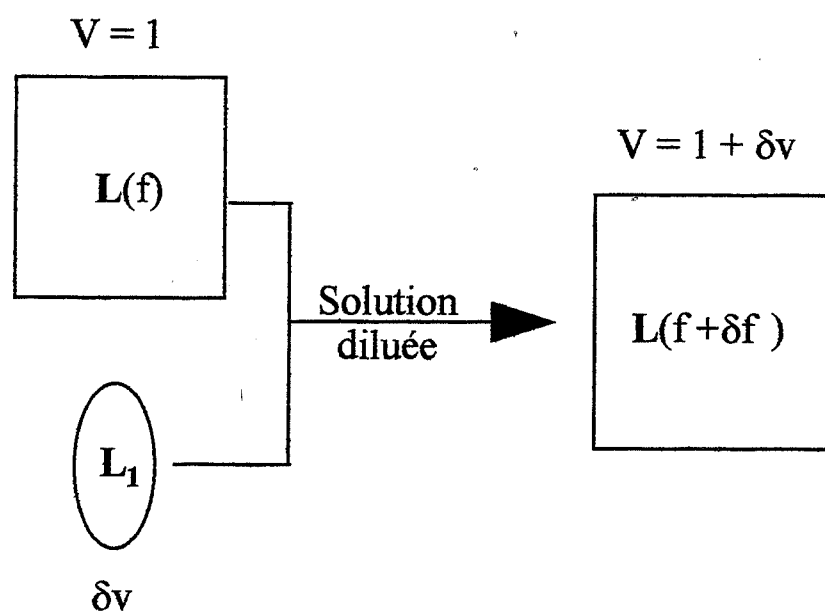
$$\frac{\delta v}{1 + \delta v} = \frac{\delta f}{1 - f} \quad (31)$$

L'équation (30) devient alors :

$$[L(f + \delta f) - L(f)] / \delta f = \frac{1}{1 - f} [L_1 - L(f)] : A_1(f) \quad (32)$$

Il reste alors à faire tendre  $\delta f$  vers 0 pour obtenir l'équation différentielle suivante :





**Figure 3 :** Principe de la méthode différentielle

$$\frac{d}{df}[\mathbf{L}(f)] = \frac{1}{1-f} [\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}(f)] : \mathbf{A}_1(f) \quad (33)$$

avec comme condition initiale :  $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}_2$ .

Dans le cas général, cette équation n'est pas intégrable analytiquement.

La démarche duale peut être suivie pour calculer le module  $\mathbf{M}(f)$ . MCLAUGHLIN montre que les deux approches vérifient  $\mathbf{M}(f) : \mathbf{L}(f) = \mathbf{I}$ . La méthode différentielle vérifie donc la condition de cohérence. Il montre d'autre part que cette méthode se situe entre les bornes de HASHIN-SHTRIKMAN dans le cas isotrope ainsi que pour un composite composé de cylindres de section circulaire. De plus, la solution exacte du composite laminaire est restituée.

Rappelons finalement que lors du mélange de deux phases isotropes, la méthode différentielle et le modèle "autocohérent" à trois phases donnent des résultats très proches (GILORMINI [1992]). Il est de plus évident que méthode différentielle et méthode des solutions diluées donnent des résultats tangents en  $f = 0$ .

Pour un matériau biphasé globalement isotrope contenant des cavités sphériques, les équations différentielles obtenues sont les suivantes (ZIMMERMAN [1991]) :

$$\frac{dG}{df} = -\frac{1}{(1-f)} \frac{15(1-\nu)}{(7-5\nu)} G \quad \text{et} \quad \frac{d\nu}{df} = \frac{3}{2(1-f)} \frac{(1-\nu)(1+\nu)(1-5\nu)}{(7-5\nu)} \quad (34)$$

### II.5. Exemple : matrice isotrope incompressible contenant des cavités sphériques

A titre d'application et de comparaison des différentes méthodes citées, nous présentons ci-dessous les résultats obtenus dans le cas simple d'un matériau composite constitué d'une matrice isotrope incompressible contenant une fraction volumique  $f$  de cavités sphériques. Le comportement global reste ainsi isotrope mais on s'attend à ce qu'il devienne compressible.

Les comportements des deux phases isotropes sont :

pour l'inclusion :  $G_1 = 0$  et  $\kappa_1 = 0$

pour la matrice :  $G_2 = G_M$  et  $\kappa_2 = +\infty$

Les seuls paramètres indépendants sont ici  $G_M$  (toujours en facteur de  $G$  et  $\kappa$ ) et  $f$ . C'est l'expression de cette dépendance en  $f$  qui diffère selon les approximations considérées.

*Bornes du comportement :*

(35)

Les bornes de MILTON-PHAN THIEN coïncident avec les bornes d'HASHIN-SHTRIKMAN dans ce cas. La borne supérieure de VOIGT ne fait pas intervenir la compressibilité globale.

	$\kappa/G_M$	$G/G_M$
VOIGT	$+\infty$	$(1 - f)$
REUSS	0	0
HASHIN-SHTRIKMAN +	$\frac{4}{3} \frac{1-f}{f}$	$\frac{1-f}{1+2f/3}$
HASHIN-SHTRIKMAN -	0	0

*Estimations du comportement :*

(36)

	$\kappa/G_M$	$G/G_M$
Solution diluée	$\frac{(4-f)\left(1-\frac{5}{3}f\right)}{3f}$	$\left(1-\frac{5}{3}f\right)$
MORI-TANAKA	HS+	HS+
Autocohérent à 2 phases	$4\left(\frac{1-f}{f}\right)\left(\frac{1-2f}{3-f}\right)$	$3\left(\frac{1-2f}{3-f}\right)$
Autocohérent à 3 phases	HS+	(+)
Méthode différentielle : solution implicite	(++)	$\frac{G_{MD}}{G_M} = (1-f^2) \left[ 2 - \left( \frac{G_{MD}}{G_M} \right)^{3/5} \right]^{1/3}$

$$\begin{aligned}
(+)\frac{G_{AC3}}{G_M} = & \frac{(-9+250f-672f^{5/3}+450f^{7/3}-19f^{10/3})-5(441-84f-4700f^2+9408f^{8/3}-5502f^{10/3}+76f^{13/3}+361f^{20/3})^{1/2}}{2(48+200f-336f^{5/3}+225f^{7/3}+38f^{10/3})}
\end{aligned}$$

(++) *Méthode différentielle* : les équations différentielles peuvent s'intégrer pour cette géométrie particulière. Le module  $v_{MD}$  est solution de l'équation suivante :

$$f = 1 - \left[ \frac{(5v_{MD} - 1)^5}{3(1 - v_{MD})(1 + v_{MD})^4} \right]^{1/6}$$

Le module de compressibilité  $\kappa_{MD}$  peut alors être calculé à l'aide de  $v_{MD}$  et  $G_{MD}$ . Le coefficient de Poisson obtenu à l'aide de la méthode différentielle lorsque  $f$  tend vers 1 est de 0,2 (ZIMMERMAN [1991]). Pour une fraction volumique de 0,05, la chute du module de cisaillement est d'environ 10% alors que le coefficient de Poisson (initialement 0,5) atteint 0,45.

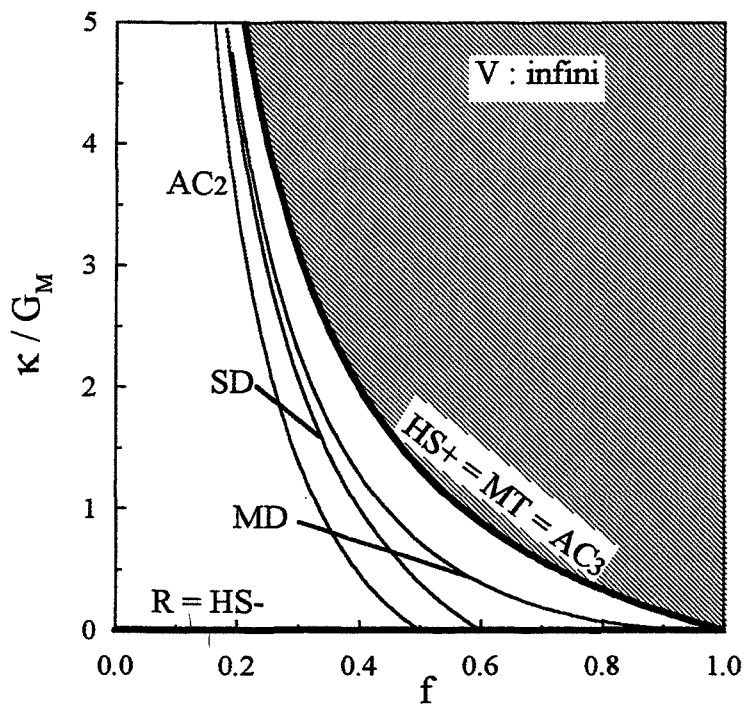
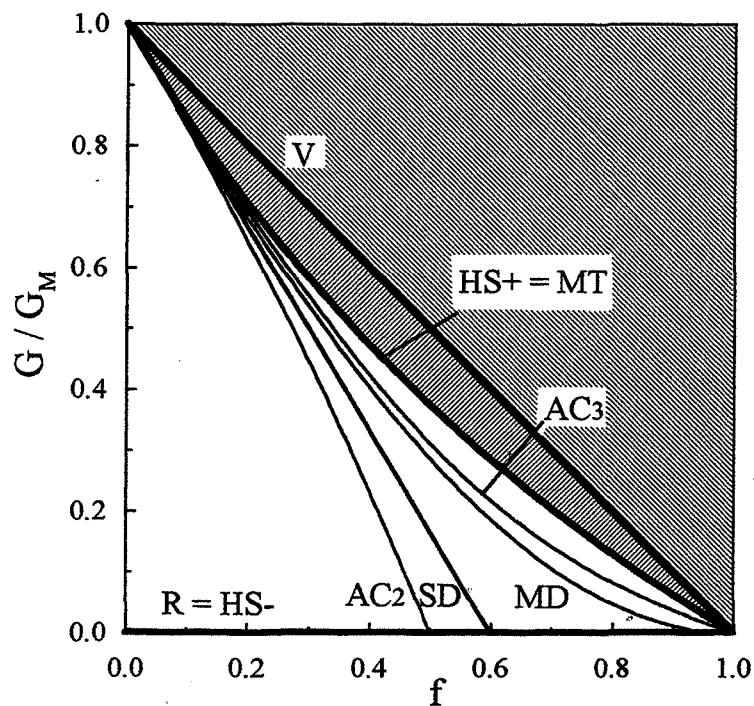
Si, à titre de comparaison, on calcule le coefficient de Poisson lorsque  $f$  tend vers 1 pour les différentes méthodes (en gardant en mémoire les hypothèses de chacune), on trouve : VOIGT : 1/2, REUSS : indéterminé, HASHIN-SHTRIKMAN : 7/23, "autocohérent" à deux phases : -1, "autocohérent" à trois phases : 5/13, solution diluée : 1/8. La grande dispersion obtenue sur ces valeurs s'explique par deux raisons : le coefficient de Poisson d'une cavité est indéterminé bien que ses modules de compressibilité et de cisaillement soient nuls ; la plupart des approximations ne sont plus correctes pour des fractions volumiques si importantes.

L'ensemble de ces résultats montre que la méthode "autocohérente" à deux phases, la borne supérieure de HASHIN-SHTRIKMAN, la méthode de MORI-TANAKA, l'approximation des solutions diluées et la méthode différentielle sont tangentes en  $f = 0$ . La méthode "autocohérente" à deux phases ne restitue des modules positifs (stabilité thermodynamique) que pour  $f < 0,5$ . FRANÇOIS, PINEAU et ZAOUI [1991] expliquent ce résultat par l'hypothèse de *désordre parfait* que suppose implicitement cette méthode : dès une porosité de 0,5 on peut trouver des chemins connexes joignant les pores dans le milieu.

Tous ces résultats sont portés sur la figure 4a. Dans le cas traité, toutes les approximations se situent entre les bornes. Cependant, cette figure permet de voir que les bornes sont très éloignées les unes des autres, d'où

V : Borne de Voigt  
R : Borne de Reuss  
HS+ : Borne supérieure de Hashin-Shtrikman  
HS- : Borne inférieure de Hashin-Shtrikman

AC2 : Modèle "autocohérent" à deux phases  
AC3 : Modèle "autocohérent" à trois phases  
SD : Solution diluée  
MD : Méthode différentielle  
MT : Méthode de Mori-Tanaka



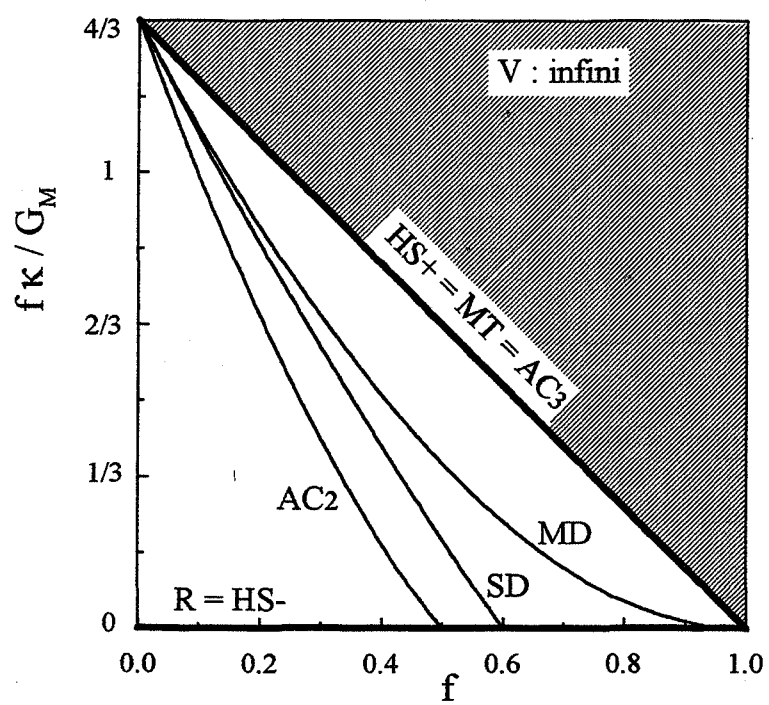
**Figure 4a :** Calcul des modules d'une matrice initialement isotrope incompressible contenant des cavités sphériques

l'intérêt d'obtenir une estimation du comportement. Jusqu'à une fraction volumique de 0,2 les différentes approximations du module de cisaillement sont très proches les unes des autres. Afin de comparer plus facilement les modules de compressibilité [la plupart proportionnel à  $1/f$  (excepté VOIGT)], la figure 4b présente le produit  $f \kappa / G_M$  en fonction de  $f$ . La borne de VOIGT reste infinie et celles de REUSS et HASHIN-SHTRIKMAN restent nulles. Toutes les autres méthodes font tendre le rapport étudié vers  $4/3$  lorsque  $f$  tend vers 0. Seules la méthode des solutions diluées et la méthode différentielle donnent encore des résultats tangents en  $f = 0$ .

Afin de quantifier l'écart entre ces méthodes aux faibles porosités, le développement limité en  $f = 0$  a été effectué pour chacune d'elles. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant : (37)

	$G / G_M$	$G_M / \kappa$
Autocohérent à 2 phases	$1 - \frac{5}{3}f - \frac{5}{9}f^2 - \frac{5}{27}f^3$	$\frac{3}{4}f + 2f^2 + \frac{9}{2}f^3$
Solution diluée	$1 - \frac{5}{3}f$	$\frac{3}{4}f + \frac{23}{16}f^2 + \frac{469}{192}f^3$
Méthode différentielle	$1 - \frac{5}{3}f + \frac{5}{18}f^2 + 35f^3$	$\frac{3}{4}f + \frac{11}{8}f^2 + 3f^3$
Autocohérent à 3 phases	$1 - \frac{5}{3}f + \frac{10}{9}f^2 - \frac{140}{27}f^3$	$\frac{3}{4}f + \frac{3}{4}f^2 + \frac{3}{4}f^3$

La méthode "autocohérente" à deux phases ne fait pas de distinction entre une phase matrice et une phase inclusionnaire. La méthode de MORITANAKA se confond avec les bornes d'HASHIN-SHTRIKMAN. La méthode "autocohérente" à trois phases est la plus vraisemblable d'un point de vue physique. Elle est cependant d'un abord compliqué. La méthode différentielle donne, d'après le tableau ci-dessus, des résultats proches de la méthode "autocohérente" à trois phases. Nous utiliserons dans la suite la méthode différentielle pour calculer l'influence de la présence de cavités ellipsoïdales de révolution.



**Figure 4b** : Modules de compressibilité multipliés par la fraction volumique en fonction de celle-ci.

### III. Méthode de calcul

Dans la suite de ce chapitre, nous quittons définitivement l'élasticité pour nous intéresser à la viscoplasticité linéaire. Les notations sont similaires, cependant les coefficients rhéologiques sont maintenant des *viscosités*. Tout au long de ce manuscrit, la phase de germination des cavités est supposée terminée dans le matériau endommagé. Sous un chargement uniforme imposé, axisymétrique d'axe  $\bar{e}_z$ , les cavités présentes vont toutes se déformer de façon analogue, c'est-à-dire s'allonger ou s'aplatir suivant l'axe  $\bar{e}_z$ . Le matériau global va ainsi perdre son isotropie initiale pour acquérir un comportement axisymétrique. Avant d'explicitier la méthode et les calculs effectués, un premier paragraphe a pour objet de décrire le comportement axisymétrique, ses propriétés et les notations choisies.

#### III.1. Construction d'un potentiel axisymétrique compressible

##### III.1.1. Formulation du comportement axisymétrique et notations

Soient  $u$  et  $v$  deux tenseurs symétriques du second ordre liés par la relation, respectant l'axisymétrie autour de l'axe  $\bar{e}_z$ ,  $u = A : v$ , où  $A$  est un tenseur du quatrième ordre. L'invariance de ce tenseur par rapport aux rotations autour de l'axe  $\bar{e}_z$  met en évidence des grandeurs de natures tensorielles différentes (Annexe IV) :

- deux scalaires (tenseurs d'ordres zéro) :  $u_{33}$  lié à l'axe de rotation et  $(u_{11}+u_{22})$  lié au plan d'isotropie ;

- un vecteur (tenseur d'ordre 1) à deux composantes liées à l'axe de rotation  $\bar{u}=(u_{13} \ u_{23})^T$  ;

- un tenseur d'ordre deux de trace nulle (déviateur des composantes dans le plan d'isotropie) caractérisé lui aussi par deux composantes :  $(u_{11}-u_{22})/2$  et  $u_{12}$ .

Par rotation autour de l'axe  $\bar{e}_z$  seules les grandeurs de même nature tensorielle sont liées entre elles. Soit  $\bar{u}_s$  le pseudovecteur constitué par les deux scalaires obtenus et  $\bar{u}_d$  le pseudovecteur constitué par les deux



composantes du tenseur d'ordre deux de trace nulle ou déviateur. L'équation  $u = A : v$ , se décompose en trois relations entre :

les scalaires : 
$$\bar{u}_s = \begin{pmatrix} \frac{u_{11}+u_{22}}{\sqrt{2}} \\ u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{v_{11}+v_{22}}{\sqrt{2}} \\ v_{33} \end{pmatrix} = (A_0) \bar{v}_s$$

les vecteurs : 
$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \end{pmatrix} = a_5 \begin{pmatrix} v_{13} \\ v_{23} \end{pmatrix} = a_5 \bar{v} \quad (38)$$

les déviateurs : 
$$\bar{u}_d = \begin{pmatrix} u_{12} \\ \frac{u_{11}-u_{22}}{2} \end{pmatrix} = a_6 \begin{pmatrix} v_{12} \\ \frac{v_{11}-v_{22}}{2} \end{pmatrix} = a_6 \bar{v}_d$$

Le tenseur  $A$  du quatrième ordre est donc constitué uniquement de six coefficients indépendants. Ce qui peut s'écrire formellement :

$$A = (A_0, a_5, a_6) = \left( \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, a_5, a_6 \right) \quad (39)$$

L'inverse de ce tenseur s'obtient alors facilement :

$$A^{-1} = \left( \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}^{-1}, \frac{1}{a_5}, \frac{1}{a_6} \right) \quad (40)$$

Si de plus,  $A$  a la symétrie diagonale ( $A_{ijkl} = A_{klij}$  ; tenseur des rigidités en élasticité par exemple),  $A_0$  est symétrique : les coefficients  $a_2$  et  $a_3$  sont égaux (ce résultat justifie le choix du facteur  $1/\sqrt{2}$ ), il ne reste alors que cinq coefficients indépendants.

Le produit entre deux tenseurs du quatrième ordre respectant l'axisymétrie se calcule de façon similaire en effectuant séparément les produits des composantes irréductibles  $A_0, a_5, a_6$ . Ce formalisme permet de retrouver la présentation du comportement axisymétrique proposée par HILL [1964], puis utilisée par WALPOLE [1969] ainsi que MCLAUGHLIN [1977]. Ces auteurs écrivent en effet la relation  $\sigma = L : \dot{\epsilon}$  comme suit :

$$L = (2k, l, l, n, 2m, 2p) \quad (41)$$

correspondant aux relations suivantes entre les composantes des tenseurs des déformations et des contraintes :

scalaires : 
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) &= k(\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}) + l\dot{\epsilon}_{33} \\ \sigma_{33} &= l(\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}) + n\dot{\epsilon}_{33} \end{aligned}$$

vecteurs : 
$$\sigma_{23} = 2p\dot{\epsilon}_{23} ; \sigma_{31} = 2p\dot{\epsilon}_{31} \quad (42)$$

déviateurs :  $\sigma_{11} - \sigma_{22} = 2m(\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22})$  ;  $\sigma_{12} = 2m\dot{\epsilon}_{12}$

où l'on voit bien apparaître les différentes composantes irréductibles. La correspondance avec (40) est immédiate :

$$\mathbf{L} = \left( \begin{pmatrix} 2k & \sqrt{2}l \\ \sqrt{2}l & n \end{pmatrix}, 2p, 2m \right) \quad (43)$$

Le tenseur des rigidités  $\mathbf{L}$  est défini positif, ce qui se traduit par  $A_0$  définie positive,  $a_5$  et  $a_6$  positifs ou encore  $k, m, n, p$  et  $(kn - l^2) > 0$ .  $k$  est le module de dilatation transverse sans déformation longitudinale,  $n$  le module de déformation uniaxiale longitudinal,  $l$  le module croisé associé,  $m$  le module de cisaillement dans tout plan transverse,  $p$  le module de cisaillement dans tout plan longitudinal.

Lorsque la matrice est isotrope ces cinq coefficients prennent les valeurs suivantes :

$$k = \kappa + G/3 ; l = \kappa - 2G/3 ; n = \kappa + 4G/3 ; p = m = G \quad (44)$$

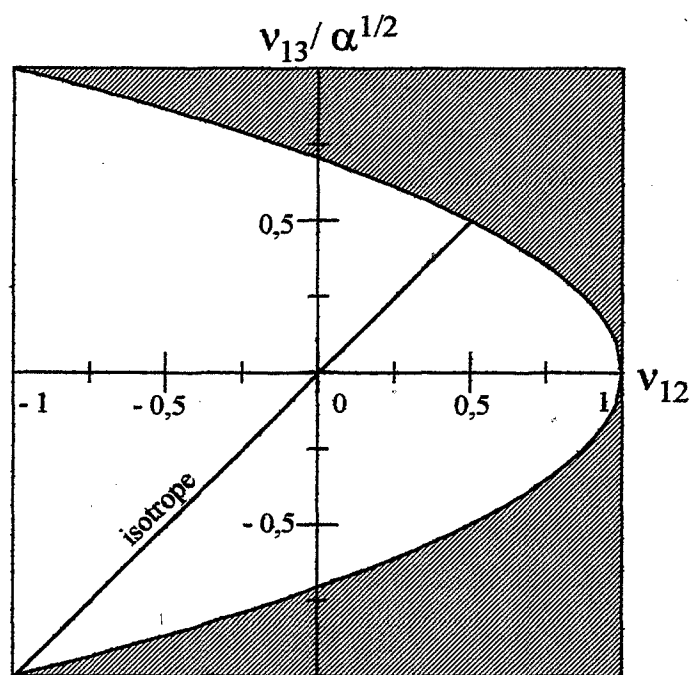
Dans le cas d'une matrice isotrope incompressible, les coefficients  $k, l, n$  sont infinis. Il est préférable de raisonner avec  $\mathbf{M} = \mathbf{L}^{-1}$  qui est non singulière. Il est alors pratique d'introduire une autre notation pour le comportement axisymétrique dont les paramètres rhéologiques gardent des valeurs finies pour un matériau incompressible. Parmi les nombreuses notations possibles, nous choisissons celles proposées par GILORMINI [1992] :

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{33} \\ \dot{\epsilon}_{12} \\ \dot{\epsilon}_{23} \\ \dot{\epsilon}_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha/E_3 & -\nu_{12}\alpha/E_3 & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}\alpha/E_3 & \alpha/E_3 & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_3 & -\nu_{13}/E_3 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha(1+\nu_{12})/E_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha(1+\nu_{12})/(E_3\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha(1+\nu_{12})/(E_3\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} \quad (45)$$

On peut aussi définir le module de cisaillement dans le plan d'isotropie par :

$$G_{12} = \frac{E_3}{2\alpha(1+\nu_{12})} \text{ et l'équivalent dans tout plan longitudinal } G_{13} = \frac{\beta E_3}{2\alpha(1+\nu_{12})}.$$

Dans cette notation, les cinq paramètres indépendants sont le module de Young longitudinal  $E_3$ , le rapport entre les modules longitudinal et transversal  $\alpha$ , le rapport entre les modules de cisaillement  $\beta = G_{13}/G_{12}$  et les deux coefficients de Poisson  $\nu_{12}$  et  $\nu_{13}$ .



**Figure 5 :** Domaine de validité des coefficients de Poisson

Le comportement est thermodynamiquement valide si la matrice ci dessus est définie positive. Cette condition implique les inégalités suivantes :

- modules de tension positifs
- modules de cisaillement positifs
- inégalités sur les coefficients de Poisson :

$$-1 < \nu_{12} < 1$$

$$-\sqrt{\frac{1-\nu_{12}}{2}} < \frac{\nu_{13}}{\sqrt{\alpha}} < \sqrt{\frac{1-\nu_{12}}{2}} \quad (46)$$

La figure 5 présente le domaine de validité des coefficients de poisson  $\nu_{12}$  et  $\nu_{13}/\sqrt{\alpha}$ . La droite d'équation  $\nu_{12} = \nu_{13}/\sqrt{\alpha}$  correspond au cas isotrope pour  $\alpha=1$ . Dans ce cas, on retrouve bien  $-1 < \nu < 1/2$ .

Le lien entre les deux notations est le suivant :

$$E_3 = n - \frac{l^2}{k} = E ; \quad \alpha = \frac{mn + kn - l^2}{4km} ; \quad \beta = \frac{p}{m} ; \quad \nu_{12} = \frac{kn - l^2 - mn}{nm + kn - l^2} ; \quad \nu_{13} = \frac{l}{2k} \quad (47)$$

ou en sens inverse :

$$k = \frac{1}{2} \frac{E_3}{\alpha(1-\nu_{12}) - 2\nu_{13}^2} ; \quad l = \frac{\nu_{13} E_3}{\alpha(1-\nu_{12}) - 2\nu_{13}^2} ; \quad n = \frac{\alpha(1-\nu_{12})}{\alpha(1-\nu_{12}) - 2\nu_{13}^2} \quad (48)$$

$$m = \frac{E_3}{2\alpha(1+\nu_{12})} ; \quad p = \frac{\beta E_3}{2\alpha(1+\nu_{12})}$$

Le comportement isotrope est restitué pour :

$$E_3 = E = \frac{9\kappa G}{3\kappa + G}, \quad \alpha = \beta = 1, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu = \frac{1}{2} \frac{3\kappa - 2G}{3\kappa + G}$$

### III.1.2. Grandeurs équivalentes et potentiel axisymétrique

Par une démarche similaire au travail effectué dans le cas isotrope, nous introduisons maintenant un potentiel des contraintes. Notons le comportement du matériau axisymétrique  $L = (A_0, a_5, a_6)$ . Le potentiel des contraintes peut se décomposer en fonction des grandeurs irréductibles (en utilisant les notations définies en (38)) :

$$\psi(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma : L^{-1} : \sigma = \frac{1}{2} \|\sigma\|_{L^{-1}}^2 = \bar{\sigma}_s^T A_0^{-1} \bar{\sigma}_s + \frac{1}{a_5} \bar{\sigma}^T \bar{\sigma} + \frac{1}{a_6} \bar{\sigma}_d^T \bar{\sigma}_d \quad (49)$$

où nous avons introduit une norme liée à la loi de comportement pour mesurer les contraintes.

Les vitesses de déformation dérivent du potentiel :

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} \quad (50)$$

En tenant compte des symétries du tenseur des contraintes, le potentiel des contraintes prend pour *valeur* :

$$\begin{aligned} 2\psi(\sigma) &= \|\sigma\|_{L^{-1}}^2 \\ &= \frac{n}{2kE} \left( \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{\sqrt{2}l}{kE} \left( \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{\sqrt{2}} \right) \sigma_{33} + \frac{\sigma_{33}^2}{E} + \frac{(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}{p} + \frac{1}{m} \left[ \left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \right] \end{aligned} \quad (51)$$

$k, n, l, m, p$  sont homogènes à des contraintes multipliés par un temps :  $[\sigma]^*t$ ,  $\|\sigma\|_{L^{-1}}$  est donc homogène à  $[[\sigma]^*t^{-1}]^{1/2}$  ( $[a]$  signifie dimension de  $a$ ).

On définit de façon similaire le potentiel des vitesses de déformation  $\phi(\dot{\epsilon}) = \frac{1}{2} \dot{\epsilon} : L : \dot{\epsilon} = \frac{1}{2} \|\dot{\epsilon}\|_L^2$  qui prend pour *valeur* :

$$\begin{aligned} 2\phi(\dot{\epsilon}) &= \|\dot{\epsilon}\|_L^2 \\ &= 2k \left( \frac{\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}}{\sqrt{2}} \right)^2 + 2\sqrt{2}l \left( \frac{\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}}{\sqrt{2}} \right) \dot{\epsilon}_{33} + n\dot{\epsilon}_{33}^2 + 4p(\dot{\epsilon}_{13}^2 + \dot{\epsilon}_{23}^2) + 4m \left[ \left( \frac{\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22}}{2} \right)^2 + \dot{\epsilon}_{12}^2 \right] \end{aligned} \quad (52)$$

$\|\dot{\epsilon}\|_L$  est aussi homogène à  $[[\sigma]^*t^{-1}]^{1/2}$ . Les deux normes ainsi définies ont les mêmes unités. Elles sont égales si les tenseurs  $\sigma$  et  $\dot{\epsilon}$  se correspondent par la loi de comportement.

La puissance de déformation plastique s'exprime alors en fonction de ces normes :

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_{ij} \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} = 2\psi(\sigma) = \|\sigma\|_{L^{-1}}^2 \\ &= \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} \frac{\partial \phi(\dot{\epsilon})}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} = 2\phi(\dot{\epsilon}) = \|\dot{\epsilon}\|_L^2 \end{aligned} \quad (53)$$

car  $\psi(\sigma)$  et  $\phi(\dot{\epsilon})$  sont respectivement homogènes de degré 2 en  $\sigma$  et  $\dot{\epsilon}$ . Le comportement viscoplastique linéaire axisymétrique est donc restitué pour  $\|\sigma\|_{L^{-1}} = \|\dot{\epsilon}\|_L$ . Les relations (51) et (52) mettent en évidence les composantes irréductibles des tenseurs de contraintes et de vitesses de déformation. En

effet, chaque composante irréductible peut se déduire du potentiel à partir de la composante correspondante :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \left( \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{\sqrt{2}} \right)} = \frac{\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}}{\sqrt{2}}, \text{ etc.} \quad (54)$$

Lorsque le comportement est axisymétrique incompressible, seuls trois paramètres subsistent. En effet, l'incompressibilité impose  $\nu_{13} = 1/2$  et  $\nu_{12} = 1/(2\alpha)$ . On a aussi  $k = n = l = +\infty$ , cependant le rapport  $n - l^2 / k$  reste fini et égal à  $E_3$ .

### III.1.3. Lien avec le comportement isotrope

Attardons nous sur ces nouvelles définitions de normes  $\|\dot{\epsilon}\|_L$  et  $\|\sigma\|_{L^{-1}}$ . Pour un matériau isotrope, les coefficients rhéologiques prennent les valeurs données par l'équation (44). Il vient alors :

$$\|\sigma\|_{L^{-1}}^2 = \frac{1}{3G} (\bar{\sigma}_{vm}^2 + \frac{3G}{\kappa} \sigma_m^2) = \frac{1}{3G} \bar{\sigma}_{\dot{\epsilon}q}^2 \quad (55)$$

$$\|\dot{\epsilon}\|_L^2 = 3G (\dot{\epsilon}_{vm}^2 + \frac{\kappa}{3G} \dot{\epsilon}_{kk}^2) = 3G \dot{\epsilon}_{\dot{\epsilon}q}^2$$

Dans le premier chapitre, le comportement isotrope linéaire est donné par  $\bar{\sigma}_{\dot{\epsilon}q} = 3G \dot{\epsilon}_{\dot{\epsilon}q}$ . Avec les notations précédentes, on a  $\|\sigma\|_{L^{-1}} = \|\dot{\epsilon}\|_L$  ; il vient alors  $\bar{\sigma}_{\dot{\epsilon}q} / \sqrt{3G} = \sqrt{3G} \dot{\epsilon}_{\dot{\epsilon}q}$ . Les relations sont équivalentes.

## III.2. La méthode différentielle dans le cas axisymétrique

### III.2.1. Présentation

Nous allons suivre le déroulement proposé par McLAUGHLIN [1977], dans le cas d'un composite contenant des cylindres infinis. Nous comparerons la méthode différentielle à la méthode diluée afin d'observer si ces deux approximations, tangentes en  $f = 0$ , s'éloignent fortement l'une de l'autre pour les faibles porosités considérées ( $f < 0,05$ ).

La matrice vierge étant isotrope, la résolution du problème auxiliaire nécessite la connaissance du tenseur d'Eshelby pour une cavité ellipsoïdale de révolution dans une matrice isotrope incompressible. Cette étape est suffisante pour appliquer la méthode des solutions diluées. En revanche, pour les incréments suivants de la méthode différentielle, il est nécessaire de connaître le tenseur de localisation dans une matrice de comportement compressible axisymétrique. Nous avons calculé le tenseur d'Eshelby correspondant à l'aide des résultats de MURA [1987]. Sa forme est donnée explicitement dans l'annexe V. Pour un comportement axisymétrique, ce tenseur (sans symétrie diagonale :  $S_{1133} \neq S_{3311}$ ) peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{S} = \left( \begin{pmatrix} S_{1111} + S_{1122} & \sqrt{2} S_{1133} \\ \sqrt{2} S_{3311} & S_{3333} \end{pmatrix}, 2S_{1313}, 2S_{1212} \right) \quad (56)$$

ce qui permet d'utiliser le formalisme précédemment décrit. Si l'on considère des cavités, le tenseur des rigidités de la phase inclusionnaire vaut  $\mathbf{L}_1 = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0 \right)$ . Le tenseur de localisation se simplifie alors en  $\mathbf{A}_1 = [\mathbf{I} - \mathbf{S}(f)]^{-1}$  où  $\mathbf{S}(f)$  est le tenseur d'Eshelby calculé dans une matrice de comportement  $\mathbf{L}(f)$  et où le tenseur  $\mathbf{I}$  se décompose en  $\mathbf{I} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, 1 \right)$ .

### III.2.2. Conditions initiales

Comme nous l'avons déjà précisé plus haut, le matériau vierge est supposé viscoplastique linéaire isotrope et incompressible. Les paramètres  $\kappa_M$ ,  $l_M$ ,  $n_M$ , proportionnels à  $\kappa_M$ , sont donc infinis. Si l'on applique la méthode des solutions diluées, les dérivées sont elles aussi infinies. Pour lever cette difficulté, on procède de façon similaire au cas isotrope (raisonner avec  $\mathbf{M}$ ). Les coefficients  $k$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $p$  sont calculés à l'aide de la méthode des solutions diluées pour une matrice isotrope *compressible* contenant des cavités. Ce résultat est alors inversé pour obtenir les grandeurs  $E_3$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{13}$ , car celles-ci ne divergent pas lorsque la matrice initiale devient incompressible. Il reste à faire tendre  $\kappa_M$  vers l'infini. Les problèmes de convergence disparaissent ainsi en  $f=0$ . Au premier ordre en  $f$ , le comportement obtenu s'écrit ( $\lambda$  désigne le facteur de forme des cavités) :

$$v_{12} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} f \frac{-3(1+2\lambda^4)J^2 + 4\lambda^2(1+2\lambda^2)J - 4\lambda^4}{[3J+2(\lambda^2-2)][3(\lambda^2-1)J^2 - 2(4\lambda^2-1)J + 4\lambda^2]}$$

$$v_{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{f}{(1-\lambda^2)J + 2\lambda^2} \quad (57)$$

$$E_3 = 3G_M \left( 1 - \frac{f}{2} \frac{(2\lambda^2-5)J + 2(3-2\lambda^2)}{[3(\lambda^2-1)J^2 - 2(4\lambda^2-1)J + 4\lambda^2]} \right)$$

$$\alpha = 1 - f \frac{3[-\lambda^4 + 3\lambda^2 - 2]J^2 + (10\lambda^4 - 19\lambda^2 + 9)J - 6\lambda^4 + 10\lambda^2 - 4}{[3J+2(\lambda^2-2)][3(\lambda^2-1)J^2 - 2(4\lambda^2-1)J + 4\lambda^2]}$$

$$\beta = 1 - f \frac{4(3\lambda^4 - \lambda^2 - 2) - 6(2\lambda^4 + \lambda^2 + 3)J}{[3J+2(\lambda^2-2)][3(\lambda^2+1)J - 4\lambda^2]}$$

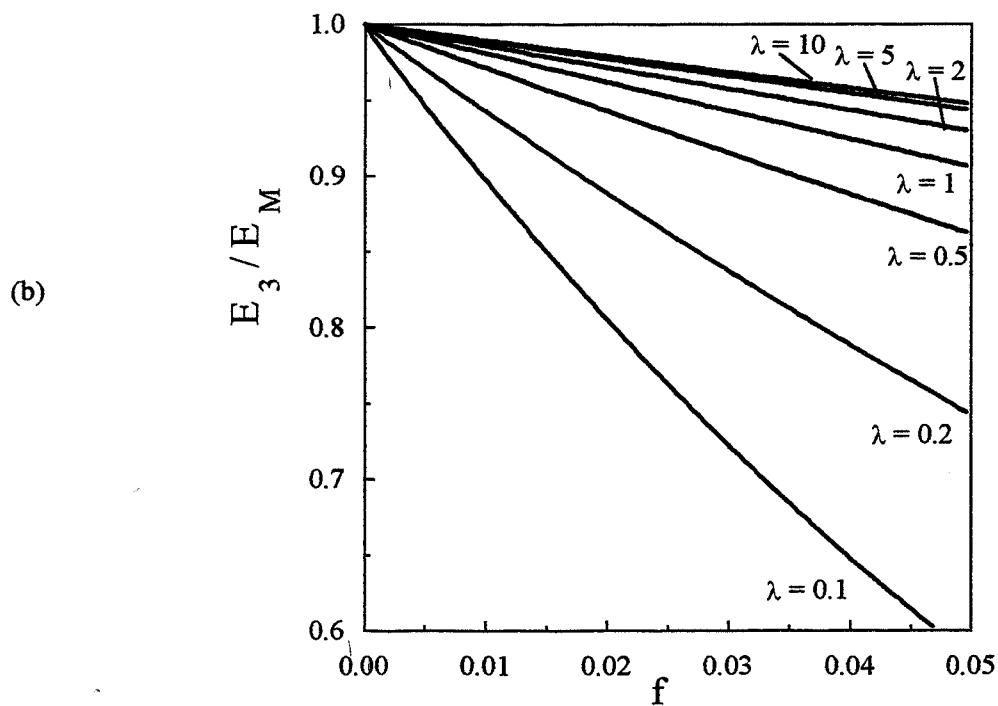
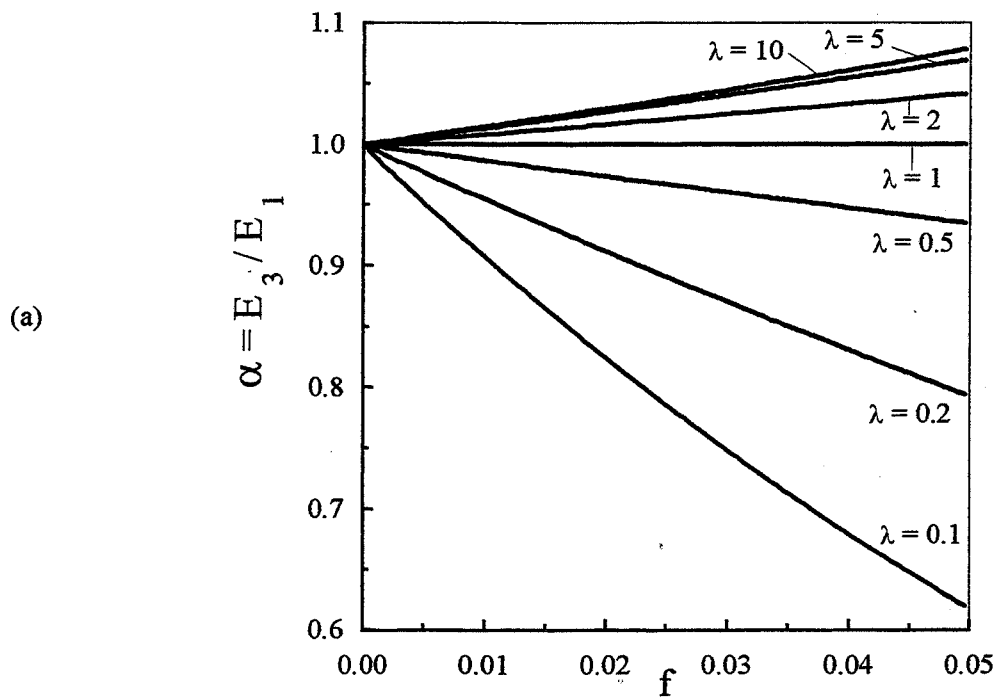
avec

$$J = \frac{\lambda}{(1-\lambda^2)^{3/2}} [\cos^{-1} \lambda - \lambda(1-\lambda^2)^{1/2}] \quad \text{pour } \lambda < 1$$

$$= \frac{\lambda}{(\lambda^2-1)^{3/2}} [\lambda(\lambda^2-1)^{1/2} - \cosh^{-1} \lambda] \quad \text{pour } \lambda > 1$$

(Pour ce calcul, le tenseur d'Eshelby déterminé dans une matrice isotrope peut se trouver par exemple dans MURA [1987] ou à l'aide du champ complet déterminé en première partie). A l'aide des relations (57), il est alors possible de calculer les coefficients  $k$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $p$  pour le premier incrément de la méthode différentielle en partant d'une matrice incompressible.





**Figure 6 :** Influence de la forme des cavités sur les coefficients rhéologiques  $\alpha$  (a) et  $E_3$  (b)

## IV. Analyse des résultats

### IV.1. Evolution des modules en fonction de $\lambda$ et $f$

#### \* Modules de Young

La figure 6a présente l'influence de la forme des cavités sur le coefficient  $\alpha$ , rapport des modules de Young longitudinal et radial. Même pour les faibles fractions volumiques considérées, ce paramètre met en évidence une anisotropie importante. Lorsque les cavités sont sphériques ( $\lambda = 1$ ), le matériau macroscopique garde un comportement isotrope : le coefficient  $\alpha$  est constant et donc indépendant de  $f$ . En revanche, pour des cavités non sphériques, les deux modules évoluent différemment.  $\alpha$  s'écarte de l'unité, manifestant ainsi l'apparition d'une anisotropie d'origine morphologique. Les cavités aplaties causent le plus grand dommage. Pour  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha$  chute d'environ 40% lorsque  $f = 0,05$ .

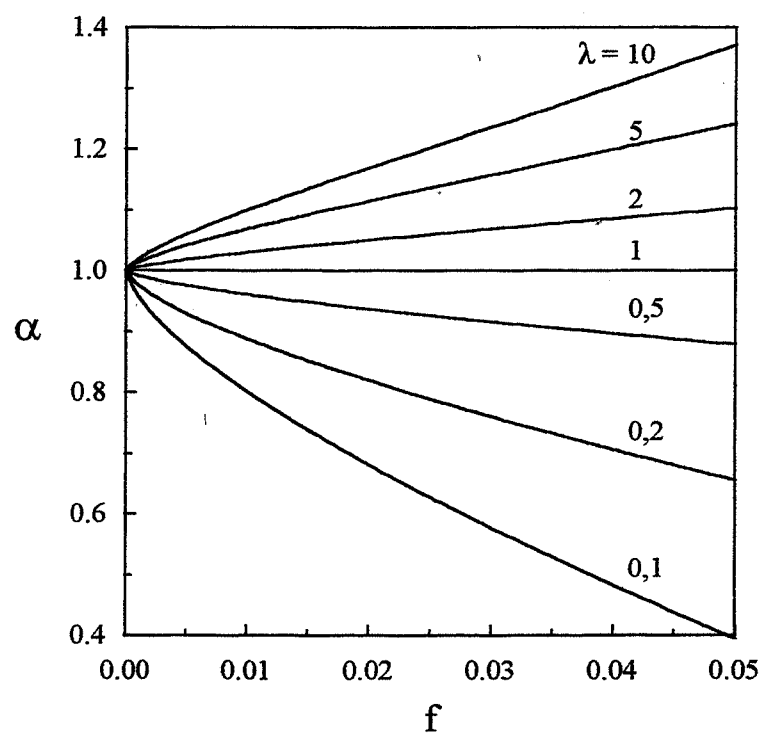
La figure 6b présente l'évolution du module longitudinal  $E_3$ . Les cavités les moins endommageantes sont allongées, les plus endommageantes sont aplaties :  $E_3$  chute de plus de 40% pour  $\lambda = 0,1$  et  $f = 0,05$  ; mais seulement de moins de 5% pour  $\lambda = 10$ .

Il est possible d'expliquer qualitativement ces tendances au moyen d'un raisonnement simple. Considérons un matériau *périodique* constitué d'une cavité ellipsoïdale de révolution incluse dans une sphère de matrice incompressible de rayon unité. La dimension de la cavité est telle que le rapport des deux volumes soit égal à  $f$ . En première approximation, l'évolution des modules longitudinal  $E_3$  et radial  $E_1$  peut être reliée à la diminution de surface de matière dans le plan perpendiculaire à la direction associée à ces modules. Il vient :

$$E_3 \text{ proportionnel à } 1 - (f / \lambda)^{2/3} \quad (58)$$

$$E_1 \text{ proportionnel à } 1 - \lambda^{1/3} f^{2/3}$$

On tire facilement de ces deux relations la dépendance des modules en fonction de  $\lambda$  : à  $f$  fixé,  $E_3$  (resp.  $E_1$ ) est plus affecté lorsque  $\lambda$  diminue (resp. augmente). De même, le coefficient  $\alpha$  est proportionnel à :



**Figure 7 :** Influence de la forme des cavités sur le paramètre  $\alpha$  pour le modèle simplifié

$$\alpha \approx \frac{1-(f/\lambda)^{2/3}}{1-\lambda^{1/3} f^{2/3}} \quad (59)$$

Pour  $f$  constant, cette quantité diminue avec  $\lambda$ . D'autre part, à  $\lambda$  constant, la dérivée de ce rapport par rapport à  $f$  vaut :  $2/3 \lambda^{1/3} f^{-1/3} (\lambda - 1) / \lambda$ . Pour  $\lambda$  supérieur à 1 (resp.  $< 1$ ),  $\alpha$  est donc croissant (resp. décroissant) en fonction de  $f$ . Ce modèle simple, présenté sur la figure 7, permet de retrouver les tendances observées sur la figure 6a. Ainsi, l'influence plus importante des cavités aplaties apparaît toujours sur cette figure 7. *Cependant, les effets sont exagérés dans ce modèle simplifié.* En première approximation, la décroissance des modules de Young peut donc être reliée à la diminution de surface de matière dans le plan normal à la direction considérée.

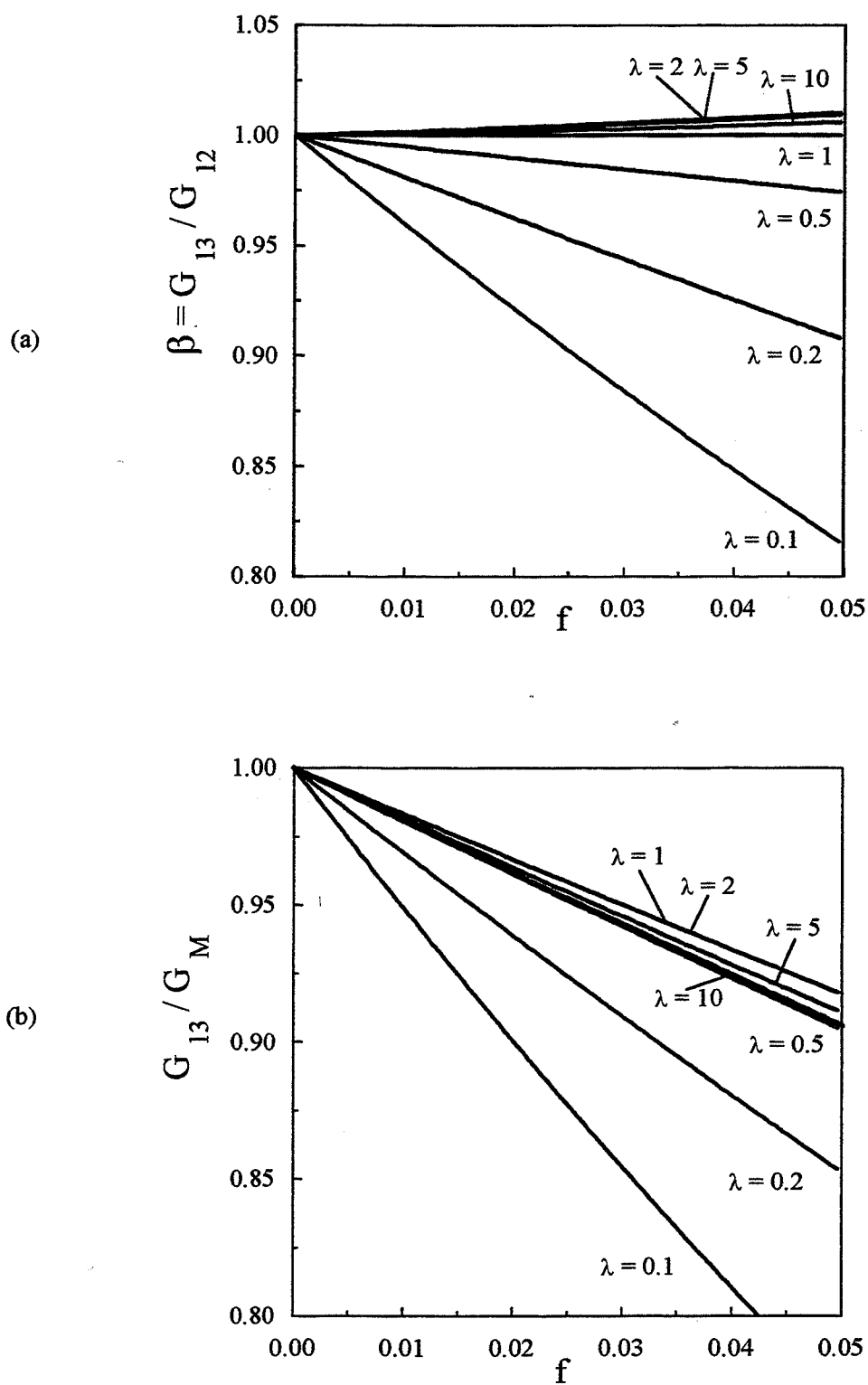
#### \* Modules de cisaillement

La figure 8a présente l'influence de  $\lambda$  sur le rapport des modules de cisaillement visqueux  $\beta$ . De même que pour  $\alpha$ ,  $\beta$  est constant lorsque les cavités sont sphériques. En revanche, l'évolution de  $\beta$  en fonction de la forme des cavités n'est plus monotone.  $\beta$  croît le plus (bien que faiblement) pour des cavités de rapport de forme proche de 2. Les cavités aplaties entraînent toujours une décroissance importante. Pour  $f = 0,05$  et  $\lambda = 0,1$   $\beta$  chute d'environ 20%.

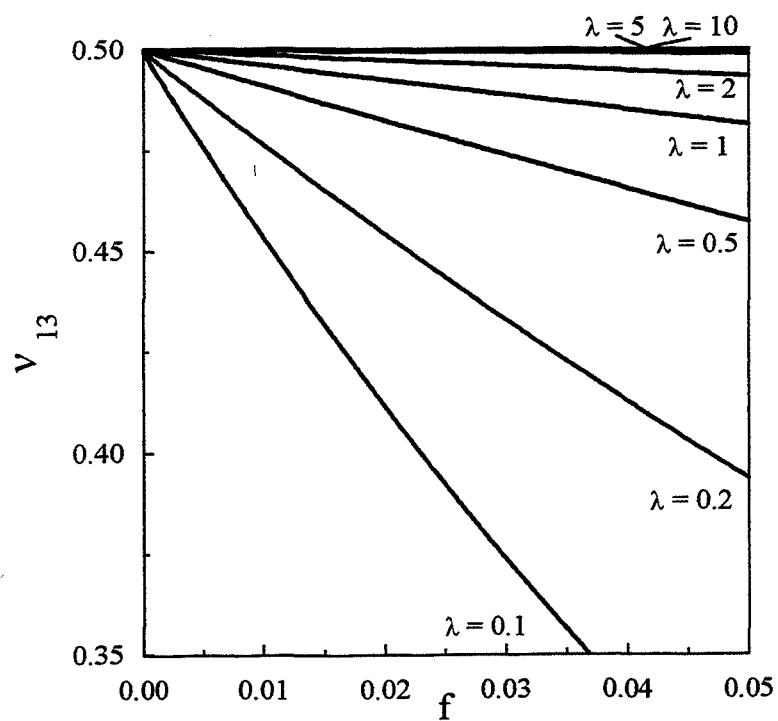
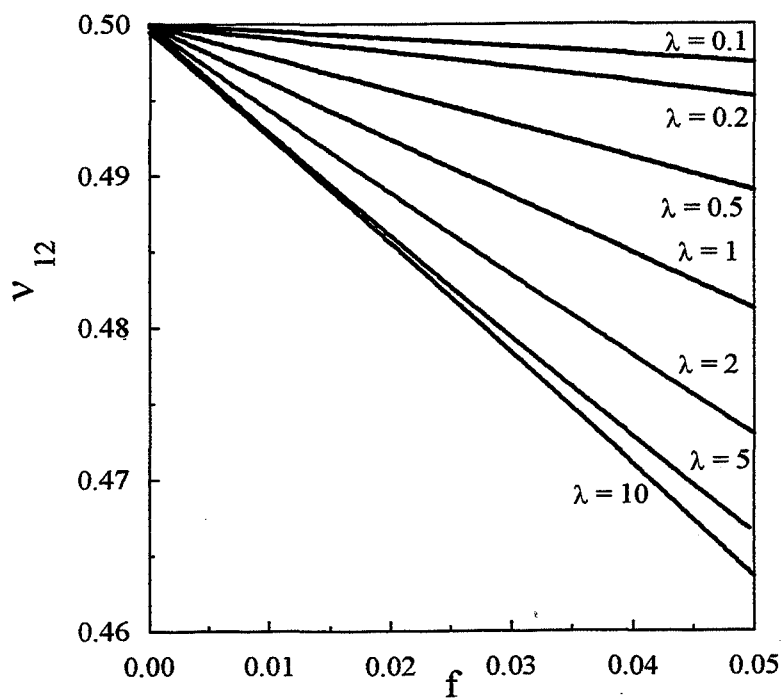
L'étude du module de cisaillement longitudinal  $G_{13}$  met en évidence les mêmes tendances. La figure 8b montre que ce sont les cavités proches de la forme sphérique qui perturbent le moins le comportement.

#### \* Coefficients de Poisson

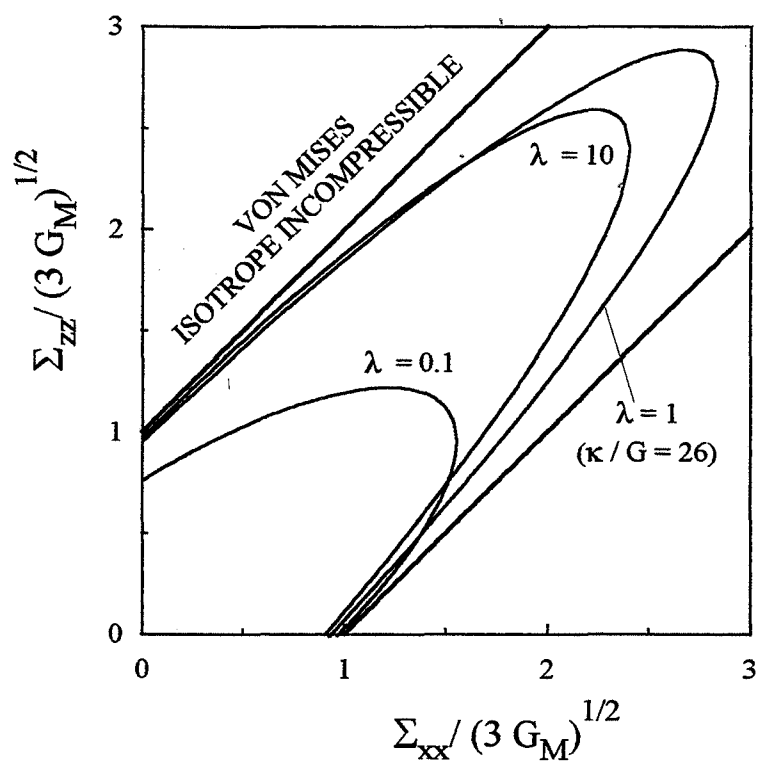
L'analyse des coefficients de Poisson (Figure 9a et b) montre que ceux-ci ne sont pas affectés dans la même mesure.  $\nu_{12}$  est plus affecté par les cavités allongées alors que  $\nu_{13}$  l'est plus par les cavités aplaties. Pour  $\lambda = 10$ ,  $\nu_{12}$  chute faiblement jusqu'à environ 0,465 pour  $f = 0,05$  ; alors que pour la même fraction volumique et  $\lambda = 0,1$   $\nu_{13}$  chute jusqu'à 0,3. On peut remarquer d'autre part que lorsque  $\lambda$  tend vers l'infini (cylindres)  $\nu_{13}$  devient indépendant de  $f$  et reste égal à 0,5. Ce résultat est à relier à celui énoncé par HILL [1964] : le comportement d'un composite formé de fibres cylindriques de section circulaire



**Figure 8 :** Influence de la forme des cavités sur le rapport des modules de cisaillement  $\beta$  (a) et sur le module de cisaillement longitudinal (b)



**Figure 9 : Influence de la forme des cavités sur les modules de Poisson**



**Figure 10 :** Surfaces équipotentiellles pour le chargement axisymétrique d'une matrice isotrope incompressible contenant une fraction volumique  $f = 0,05$  de cavités de rapport de forme  $\lambda$

alignées (de comportement axisymétrique) ne dépend plus que de trois paramètres.

#### IV.2. Potentiel axisymétrique

L'étude des surfaces équipotentielles montre l'influence de l'anisotropie. Les surfaces  $\|\Sigma\|_{L^{-1}} = \|\dot{E}\|_L = 1$  correspondant au comportement macroscopique sont représentées dans l'espace des contraintes ( $\Sigma_{zz} = S$ ,  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} = T$ ) (Figure 10) par :

$$\|\Sigma\|_{L^{-1}}^2 = \frac{n}{kE} T^2 - \frac{2l}{kE} ST + \frac{1}{E} S^2 = 1 \quad (60)$$

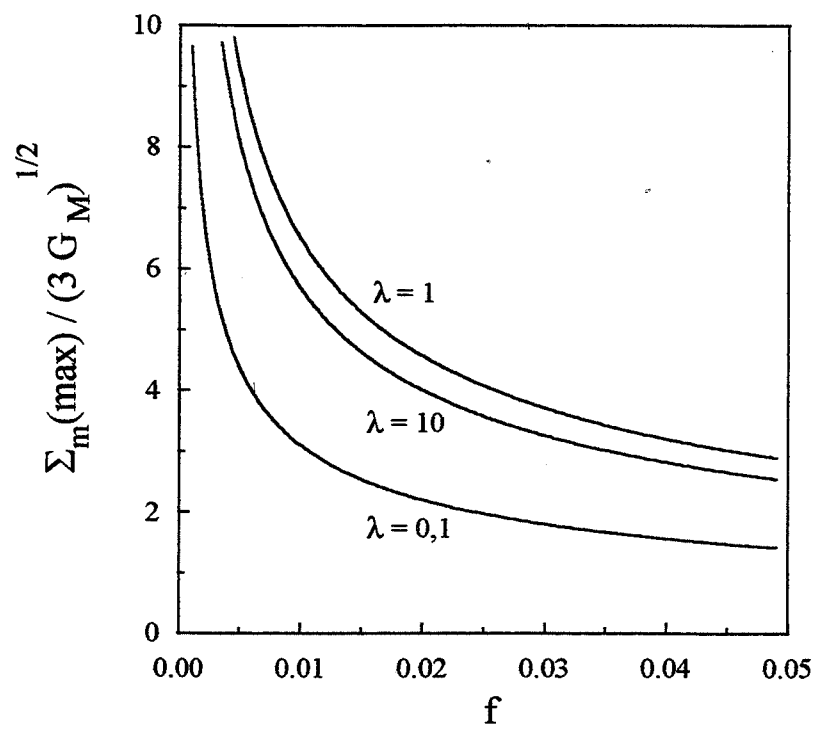
Dans cet espace les deux droites correspondent à une coupe du cylindre de von Mises (matériau incompressible). L'influence de la forme des cavités sur les équipotentielles est la suivante : l'ellipse obtenue pour les cavités sphériques est la plus allongée. Les cavités de forme non sphérique ont deux influences : d'une part une diminution du grand axe (plus importante pour des cavités aplaties), d'autre part une rotation de l'ellipse. Pour des formes allongées (resp. aplaties), le grand axe de l'ellipse s'oriente vers l'axe S (resp. T). Ceci indique que la contrainte la plus endommageante est T au détriment de S lorsque les cavités s'allongent.

Il est possible de comparer ces résultats à ceux proposés par QIU et WENG [1993]. Ces auteurs calculent l'influence de la forme et de la fraction volumique des cavités sur le potentiel plastique à l'aide d'une approche énergétique utilisant des modules sécants. Les conclusions obtenues par cette approche différente sont similaires bien que plus marquées car les auteurs présentent leurs résultats pour des fractions volumiques de cavités très importantes : 0,2 et 0,3.

La présence de cavités dans le matériau endommagé entraîne l'intervention de la contrainte moyenne dans la norme des contraintes  $\|\Sigma\|_{L^{-1}}$ . Il est alors possible de calculer la contrainte moyenne maximale admissible pour  $\|\Sigma\|_{L^{-1}} = \|\dot{E}\|_L = 1$  :

$$\Sigma_m^{\max} = \frac{1}{3} [4(l+k) + n]^{1/2} \quad (61)$$





**Figure 11 :** Contrainte moyenne maximale en fonction de la porosité pour des cavités de rapport de forme  $\lambda$ .

Cette valeur maximale de la contrainte moyenne est atteinte pour une contrainte radiale  $T$  égale à :

$$T(\Sigma_m^{\max}) = \frac{l+2k}{[4(l+k)+n]^{1/2}} \quad (62)$$

Si d'autre part, on calcule la contrainte radiale telle que  $T = S$ , on obtient :

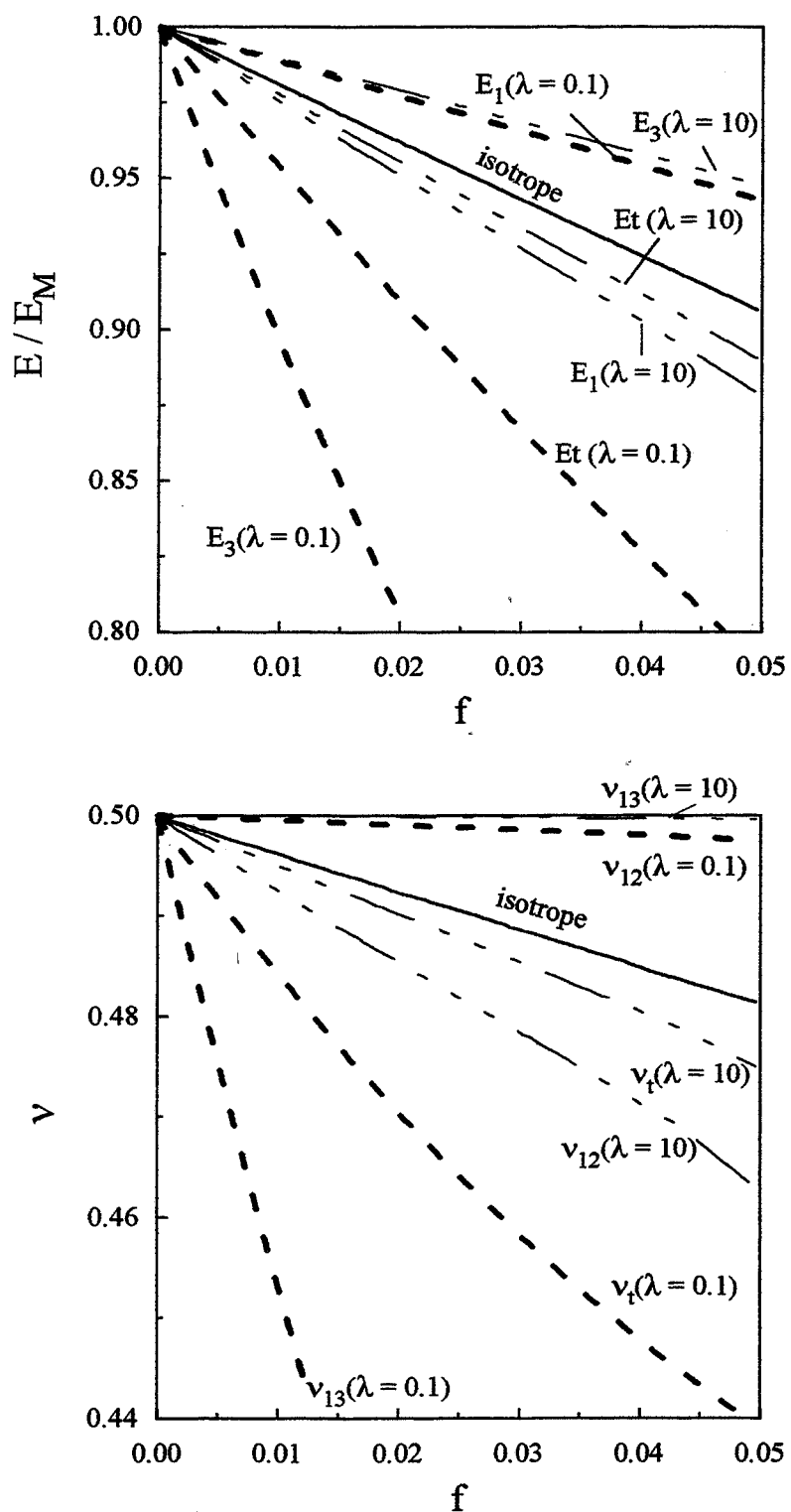
$$T=S=\Sigma_m = \left[ \frac{kn-l^2}{n-2l+k} \right]^{1/2} \quad (63)$$

On vérifie à l'aide des équations (62) et (63) que la contrainte moyenne est maximale pour  $S = T$  *uniquement* lorsque le comportement est isotrope. En effet, lorsque le comportement n'est plus isotrope, il n'est plus possible de découpler d'une part la partie déviatorique du tenseur des contraintes et d'autre part la contrainte moyenne. La figure 11 présente l'influence de la porosité et de la forme des cavités sur la contrainte moyenne maximale ( $\|\Sigma\|_{L^{-1}} = \|\dot{E}\|_L = 1$ ). Celle-ci décroît rapidement avec la porosité car elle est infinie pour  $f = 0$ . On observe une décroissance plus importante de la contrainte moyenne maximale lorsque les cavités sont aplaties.

### IV.3. Mesure particulière de l'anisotropie : comportement isotrope "le plus proche"

Afin de mesurer l'écart à l'isotropie, nous avons défini un comportement isotrope "le plus proche" à tout comportement axisymétrique donné. La dénomination isotrope "le plus proche" est définie dans la suite. Elle fait référence à une projection de l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 4 sur le sous espace des tenseurs isotropes. La méthode utilisée consiste à calculer le comportement isotrope dont la puissance plastique est égale à celle du comportement axisymétrique. Pour ne pas spécifier de chargement particulier, nous intégrons cette puissance sur toutes les directions possibles d'un vecteur contrainte (ou vitesse de déformation) unitaire exprimé dans un espace à 6 dimensions (*i.e.* : sur la sphère unité) relativement à la métrique euclidienne.

Soit  $L_{\text{axi}}$  un comportement axisymétrique donné et  $L_{\text{iso}}$  le comportement isotrope recherché,  $L_{\text{iso}}$  dépend de deux paramètres ( $v$ ,  $E$ ) ou ( $\kappa$ ,  $G$ ) par exemple. La puissance plastique pour les deux matériaux est :



**Figure 12 :** Comparaison des modules de Young transverse et longitudinal avec le module isotrope le plus proche  $Et$  (a)  
 Comparaison des modules de Poisson transverse et longitudinal avec le module isotrope le plus proche  $\nu_t$  (b)  
 pour  $\lambda = 0,1$  (traits interrompus épais) et  $\lambda = 10$  (traits interrompus fins)

$$\dot{W}_{axi} = \dot{\epsilon} : L_{axi} : \dot{\epsilon} \text{ et } W_{iso} = \dot{\epsilon} : L_{iso} : \dot{\epsilon} \quad (64)$$

$$\text{ou} \quad = \sigma : L_{axi}^{-1} : \sigma \quad = \sigma : L_{iso}^{-1} : \sigma$$

Les deux équations recherchées sont données par :

$$\begin{aligned} \int_{S_6} \dot{\epsilon} : (L_{axi} - L_{iso}) : \dot{\epsilon} dS_6 &= (L_{axi} - L_{iso}) :: \int_{S_6} \dot{\epsilon} \otimes \dot{\epsilon} dS_6 = 0 \\ \int_{S_6} \sigma : (L_{axi}^{-1} - L_{iso}^{-1}) : \sigma dS_6 &= (L_{axi}^{-1} - L_{iso}^{-1}) :: \int_{S_6} \sigma \otimes \sigma dS_6 = 0 \end{aligned} \quad (65)$$

qui prennent donc bien la forme d'un produit scalaire. Dans ces équations,  $S_6$  est la surface de la sphère unité en dimension 6. Le calcul effectué, on obtient :

$$E \{ 15\alpha(1+v_{12}) + \beta[\alpha(13+3v_{12})+2] \} - 6E_3\beta(3v+5) = 0 \quad (66) \text{ et } (67)$$

$$\begin{aligned} &6\alpha(8v-5)(1+v_{12})[\alpha(v_{12}-1)+2v_{13}^2]E... \\ &... - (2v-1)(v+1)\{\alpha v_{12}[2\alpha v_{12}+3(5\beta+1)]+2(8+15\beta)v_{13}^2-2\alpha^2-(13+15\beta)\alpha\}E_3=0 \end{aligned}$$

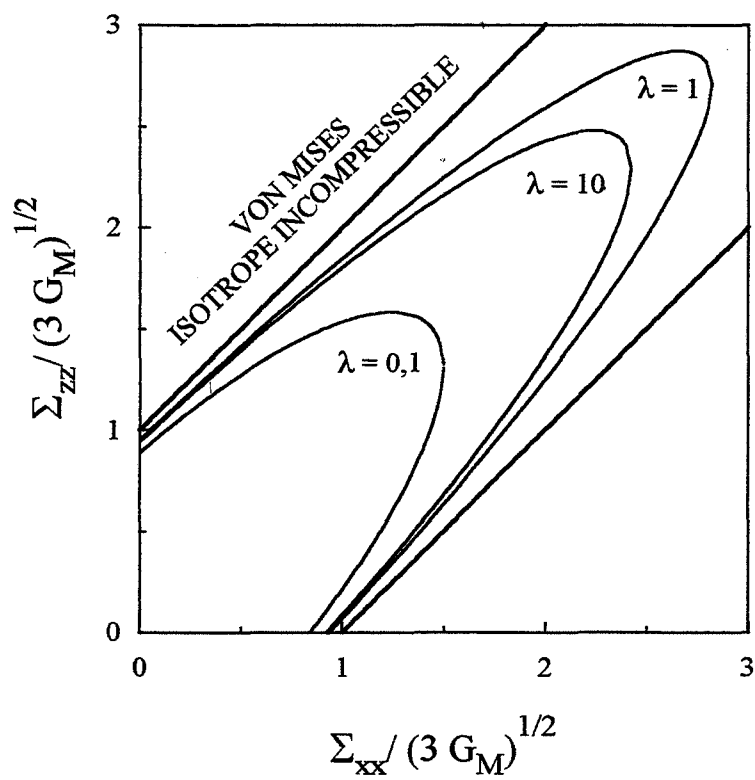
ou encore, à l'aide des autres coefficients rhéologiques :

$$-15p-n-8m-5k+6\kappa+26G=0 \quad (68)$$

$$2pm(kn-l^2)(4G+39\kappa)-3[(kn-l^2)(15m+8p)+pm(4k+5n)]\kappa G=0 \quad (69)$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues  $E$  et  $v$  s'effectue de la façon suivante :  $E$  est obtenu en fonction de  $v$  à l'aide de l'équation (66). Après substitution dans (67),  $v$  est solution d'une équation du second degré. Deux couples de solutions sont donc obtenus. Si le comportement de départ est isotrope, de coefficients  $E'$  et  $v'$  ( $\alpha = \beta = 1$  ;  $v_{12} = v_{13} = v'$  ;  $E_3 = E'$ ), les solutions obtenues pour  $v$  sont :  $v = v' / (v' - 1)$  et  $v = v'$ ,  $E$  étant alors déduit à l'aide de (66). Nous ne garderons bien entendu que la solution restituant le même comportement en isotrope.

On peut montrer facilement que, sur la "frontière admissible"  $v_{13}/\sqrt{\alpha} = \pm\sqrt{1-v_{12}}/\sqrt{2}$ , le coefficient de Poisson obtenu est toujours égal à 1/2 lorsque  $\alpha = 1$ . D'autre part, il existe des comportements axisymétriques tels que le comportement isotrope le plus proche ne peut pas être calculé par cette méthode (le discriminant de l'équation du second degré étant alors négatif). Cependant dans tous les cas considérés ici, les modules isotropes les plus proches existent. Ils peuvent en première approximation rendre compte de



**Figure 13 :** Surfaces équipotentiellles pour le chargement axisymétrique d'une matrice isotrope incompressible contenant une fraction volumique  $f = 0,05$  de cavités de rapport de forme  $\lambda$  ; comportement isotrope le plus proche

l'endommagement dû à des cavités de formes différentes. Ils caractérisent de plus les matériaux isotropes contenant des cavités ellipsoïdales de même forme et orientées aléatoirement.

*\* Modules isotropes les plus proches*

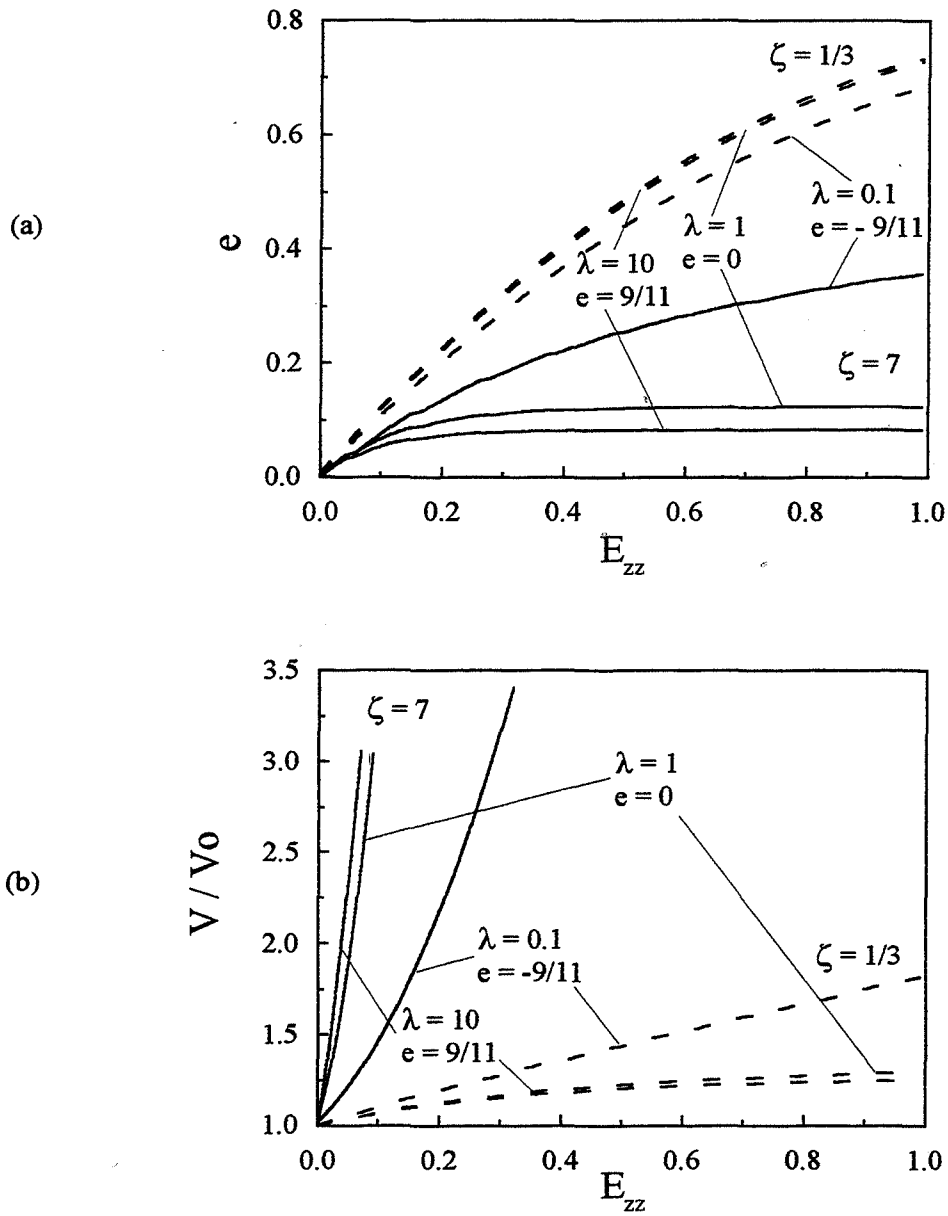
Etudions maintenant l'influence de la forme des cavités sur le comportement isotrope le plus proche (Figure 12), dans les deux cas extrêmes étudiés  $\lambda = 0,1$  ou  $10$ . Pour les deux coefficients considérés (Young et Poisson), le comportement isotrope le plus proche restitue la tendance observée précédemment : la cavité sphérique est la moins endommageante. Les cavités aplaties ont le rôle le plus néfaste sur le comportement global, alors que les cavités allongées n'engendrent pas une différence notable avec le comportement isotrope. Une fois encore, l'influence de la forme n'est pas négligeable dès  $f = 0,05$ . La comparaison de  $E_t (\lambda = 1)$  et  $E_t (\lambda = 0,1)$  montre une chute de plus de 10%. En revanche, l'influence sur le coefficient de Poisson est beaucoup plus faible.

*\* Potentiel isotrope*

Il est maintenant possible de représenter la contrainte équivalente macroscopique isotrope (cf. chapitre I) pour une vitesse de déformation donnée. La figure 13 présente  $\|\Sigma\|_{L^{-1}}$  dans l'espace des contraintes ( $\Sigma_{zz} = S$ ,  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} = T$ ) pour une vitesse de déformation unitaire ( $\|\Sigma\|_{L^{-1}} = \|\dot{E}\|_L = 1$ ). Le calcul du comportement isotrope le plus proche permet de mettre en évidence l'influence de la forme des cavités. Il apparaît toujours nettement que les cavités sphériques sont les moins endommageantes et les cavités aplaties les plus nocives. La comparaison avec la figure 10 montre que seule la rotation des courbes isopotentielle n'est pas restituée.

#### **IV.4. Croissance d'une cavité initialement sphérique dans un matériau axisymétrique compressible linéaire**

L'anisotropie induite par l'endommagement devenant rapidement non négligeable, nous nous proposons dans cette section d'étudier l'influence du comportement axisymétrique de la matrice sur la croissance d'une cavité isolée initialement sphérique. L'anisotropie choisie pour la matrice est la conséquence



**Figure 14 :** Croissance d'une cavité initialement sphérique dans une matrice de comportement axisymétrique dû à la présence de 5% de cavités de rapport de formes  $\lambda$ . Croissance de l'excentricité (a) Croissance du volume (b)

de la présence d'une fraction volumique  $f = 0,05$  de cavités de rapport de forme  $\lambda$  donné. Afin de rester cohérent avec les deux chapitres précédents, le chargement imposé au cours de la déformation est  $(\zeta^\infty, \dot{E}_{zz})$ . Pour un comportement axisymétrique donné, il est possible de calculer la vitesse de déformation radiale :

$$\dot{E}_{xx} = \frac{1}{2} \frac{n+2l+3\chi\zeta^\infty(l-n)}{3\chi\zeta^\infty(l-k)-l-2k} \dot{E}_{zz} \quad (70)$$

avec  $\chi = \text{sgn}(S - T)$

Les vitesses de déformation de la cavité s'obtiennent alors à l'aide du tenseur d'Eshelby donné en annexe V. On notera qu'au cours du chargement la rhéologie de la matrice reste *constante* ; seule la cavité isolée évolue.

La figure 14 présente les résultats obtenus pour deux chargements définis par  $\zeta^\infty = 1/3$  et 7 (pour une vitesse de déformation axiale unitaire). Lorsque le comportement du matériau est isotrope, son coefficient de Poisson vaut environ 0,48. Il est alors possible de comparer les courbes avec les résultats proposés dans le premier chapitre.

Dans la suite de la discussion, nous nommons  $MD_\lambda$  le comportement axisymétrique dû à la présence de cavités de forme  $\lambda$ . Il apparaît sur la figure 14 que l'influence de l'anisotropie sur la croissance des cavités dépend de la triaxialité imposée. L'évolution de l'excentricité est présentée sur la figure 14a. En premier lieu, cette figure montre que l'excentricité asymptotique de la cavité dépend de l'anisotropie du comportement (rappelons que pour un matériau isotrope, elle ne dépend pas du caractère compressible). A haute triaxialité, la cavité s'allonge beaucoup plus dans une matrice  $MD_{0,1}$  que dans une matrice  $MD_1$  ou  $MD_{10}$ . La tendance est inversée à faible triaxialité. De même (Figure 14b), le volume de la cavité croît, sous haute triaxialité, de plus en plus rapidement dans les matrices  $MD_{0,1}$ ,  $MD_1$  et  $MD_{10}$ . Cet effet s'inverse pour  $\zeta^\infty = 1/3$ .

Ainsi, sous un chargement à haute triaxialité, une cavité sphérique isolée dans une matrice contenant des cavités aplaties aura tendance à croître moins rapidement et à s'allonger de façon plus importante que dans une matrice isotrope contenant la même fraction volumique de cavités sphériques. L'étude des modules précédemment effectuée permet de comprendre ces tendances. Le comportement  $MD_{0,1}$  est caractérisé par un module longitudinal plus faible que





son module transverse, ce qui explique l'allongement plus important de la cavité. D'autre part, nous avons vu que les cavités aplaties affectent beaucoup plus la compressibilité de la matrice (étude du coefficient de Poisson le plus proche). Ce résultat, ajouté à ceux de la première partie concernant l'influence de la compressibilité de la matrice sur l'évolution d'une cavité, explique le ralentissement observé de la croissance volumique.

La comparaison de la croissance d'une cavité isolée initialement sphérique dans une matrice de comportement axisymétrique avec celle d'une cavité dans une matrice de comportement isotrope le plus proche, pour une triaxialité élevée  $\zeta^\infty = 7$  montre les résultats suivants. L'étude de la croissance volumique de la cavité montre que le comportement isotrope le plus proche restitue les tendances observées bien que les effets soient moins importants. En revanche, l'évolution de l'excentricité de la cavité ne peut être restituée. En effet, le premier chapitre a permis de montrer que l'excentricité asymptotique d'une cavité dans une matrice isotrope ne dépend pas de la compressibilité.

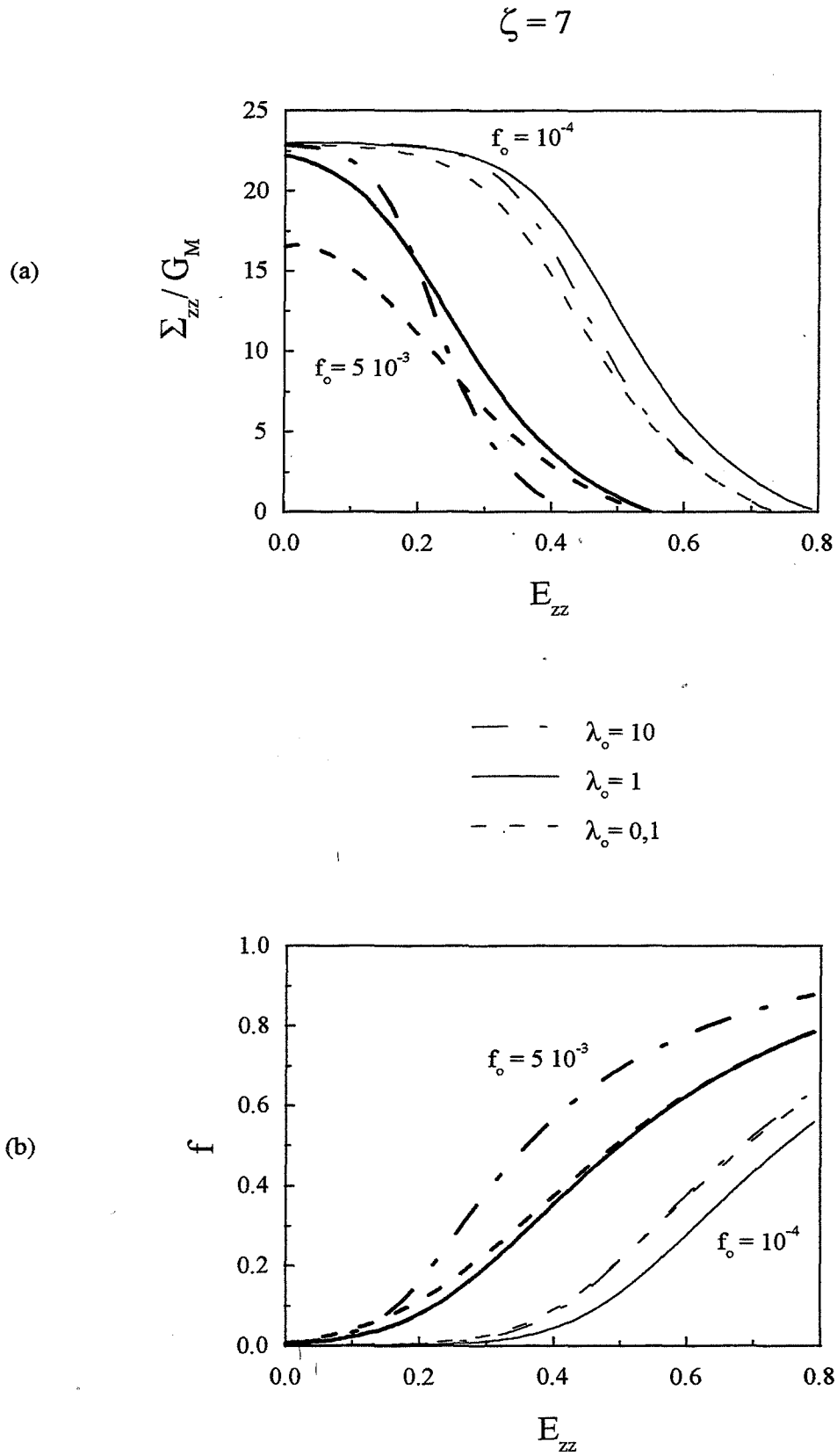
#### IV.5. Evolution de l'endommagement

Les chapitres III et I permettent respectivement de déterminer le comportement macroscopique d'une matrice isotrope incompressible contenant une fraction volumique  $f$  de cavités de facteur de forme  $\lambda$ , puis de connaître la croissance d'une cavité de forme  $\lambda$  dans une matrice de comportement déterminé ci-dessus soumise à un chargement axisymétrique. Il est donc possible d'étudier l'évolution de l'endommagement d'une matrice comportant une fraction volumique initiale  $f_0$  de cavités de rapport de forme initial  $\lambda_0$ . Ceci suppose que la phase de germination de la cavité est terminée. Physiquement, le rapport de forme initial  $\lambda_0$  est directement lié à la forme des inclusions à l'origine de la germination des cavités.

Tout au long de ce manuscrit, il a été choisi d'imposer comme paramètres de chargement le couple  $(\dot{E}_{zz}, \zeta^\infty)$ . La vitesse de croissance volumique du matériau endommagé vaut alors :

$$\dot{E}_{kk} = \frac{n+1-2k+3\chi\zeta^\infty(2l-n-k)}{3\chi\zeta^\infty(l-k)-1-2k} \dot{E}_{zz} \quad (71)$$

La matrice vierge est supposée isotrope *incompressible*, la croissance volumique de l'ensemble est donc uniquement la conséquence de la croissance



**Figure 15 :** Influence de l'évolution de l'endommagement sur la contrainte longitudinale pour une triaxialité de 7 (a) Evolution correspondante de la fraction volumique (b)

volumique des cavités. Cette hypothèse implique de pouvoir vérifier au cours du chargement la relation suivante :

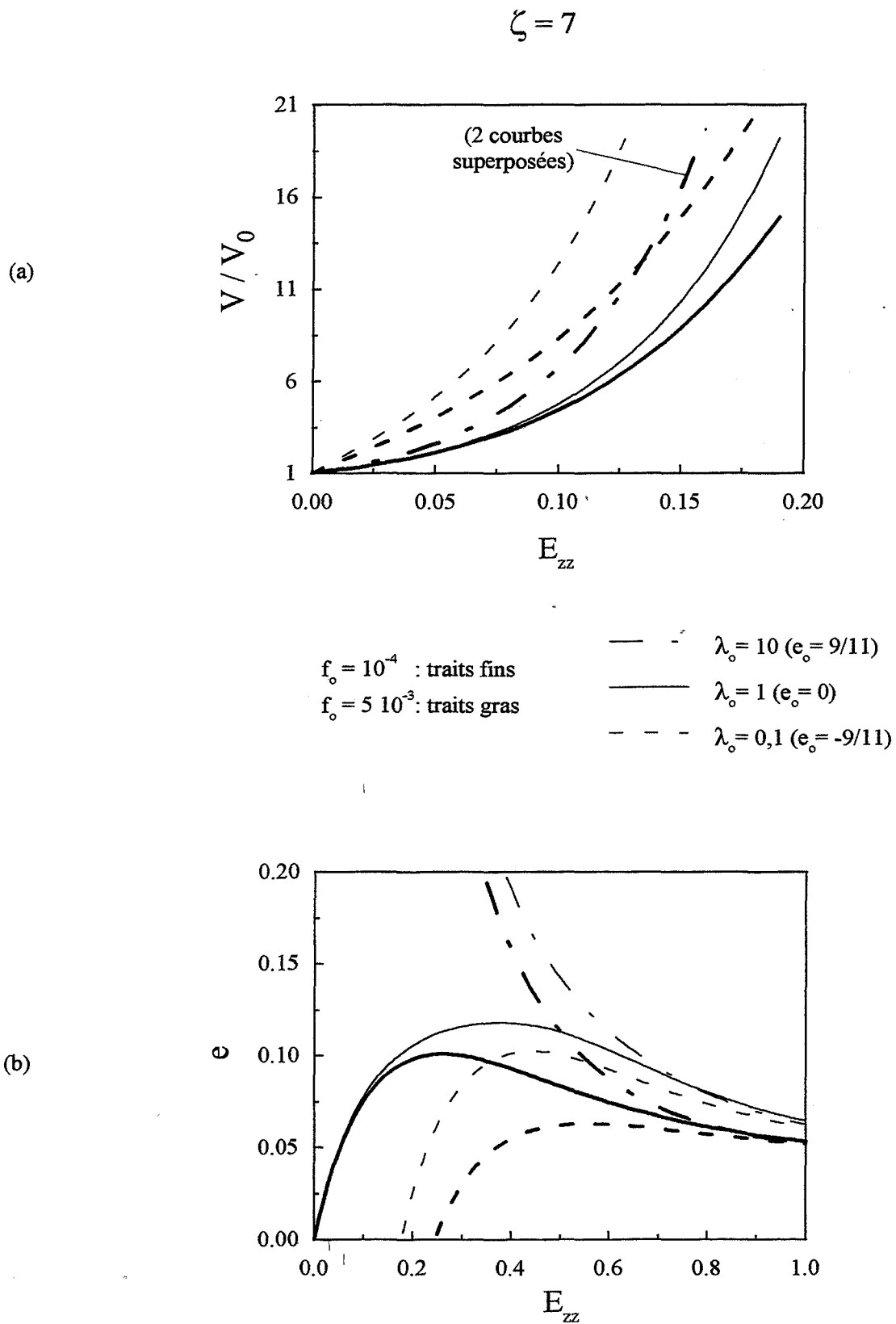
$$\left(\frac{\dot{V}}{V}\right)_{\infty} = \dot{E}_{kk} = f \left(\frac{\dot{V}}{V}\right)_{cav} = f \dot{\epsilon}_{kk}^{cav} \quad (72)$$

où  $\dot{\epsilon}_{kk}^{cav}$  est calculé par l'étude d'une cavité isolée de forme  $\lambda$  dans la matrice endommagée [*i.e.* de comportement  $(k, l, n)$  identique à celui de l'équation (71)].

Lorsque l'on applique la méthode différentielle afin de déterminer le comportement à un instant donné, les cavités que l'on ajoute à chaque incrément de fraction volumique n'ont pas un rôle identique. En effet, elles ne sont pas insérées dans une matrice de comportement constant. La relation (72) n'est alors vérifiée qu'en calculant la moyenne des croissances volumiques des cavités ajoutées à chaque étape (ceci peut être vérifié, dans le cas de cavités sphériques, en tenant compte de la déformation induite dans la matrice par la cavité supplémentaire). Cependant, il a été vérifié numériquement que les équations (71) et (72) donnent des résultats superposables pour des fractions volumiques faibles (de l'ordre de 10%). Il est donc possible de suivre l'évolution de l'endommagement au cours du chargement. A chaque incrément de déformation, le calcul de localisation permet donc de déterminer le changement de forme des cavités.

La figure 15a montre l'évolution de la contrainte axiale  $\Sigma_{zz}$  en fonction de la déformation macroscopique axiale  $E_{zz}$ . Trois rapports de forme initiaux (10, 1 et 0,1) ont été considérés pour deux fractions volumiques initiales ( $10^{-4}$  et  $5 \cdot 10^{-3}$ ). L'ensemble est soumis à une triaxialité  $\zeta^{\infty} = 7$ . L'influence de la fraction volumique initiale est très nette. De plus, globalement la croissance de l'endommagement amorcé par des cavités sphériques est moins rapide que pour les autres facteurs de forme. Pour  $f_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ , l'endommagement lié à  $\lambda_0 = 10$  croît très rapidement. Ceci peut s'expliquer avec la figure 15b présentant l'évolution de la fraction volumique en fonction de la déformation axiale. En effet, bien que l'endommagement dû à des cavités aplaties soit plus important, la croissance volumique des cavités allongées est plus rapide à cette triaxialité. La compétition des deux phénomènes explique l'allure des courbes observées sur la figure 15a.

Le modèle présenté ici suppose que toutes les cavités se déforment de manière similaire. Il est donc possible de suivre leur croissance au cours de la



**Figure 16 :** Croissance des cavités dans une matrice en cours d'endommagement  
 (a) croissance volumique (b) évolution de l'excentricité

déformation lorsque la matrice s'endommage. La croissance du volume et de l'excentricité des cavités de formes initiales  $\lambda_0 = 10, 1$  ou  $0,1$  est présentée sur la figure 16. Pour  $f_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ , il apparaît bien que la croissance volumique des cavités initialement allongées devient la plus importante dès une déformation de  $0,15$ . L'évolution de l'excentricité (figure 16b) semble montrer que la forme asymptotique des cavités dépend de la fraction volumique initiale des cavités mais pas de leur forme. De plus, les cavités initialement sphériques ou aplaties voient leur excentricité passer par un maximum pour finalement décroître vers l'excentricité asymptotique. Récemment, PONTE CASTAÑEDA et ZAIDMAN [1994] se sont intéressés au problème similaire dans un matériau de comportement non linéaire. Ils montrent aussi que sous certains chargements imposés, l'anisotropie induite par l'évolution de la forme des cavités devient rapidement importante.

## V. Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre en évidence, au moyen de la méthode différentielle, l'apparition d'une anisotropie d'origine morphologique dans le matériau endommagé, même lorsque la fraction volumique de cavités est encore faible ( $f < 0,05$ ). Cette anisotropie devient importante lorsque les cavités ont des rapports de forme supérieurs à 5 (cavités allongées) ou inférieurs à 0,2 (cavités aplaties).

On a montré d'autre part que les cavités sphériques sont les moins endommageantes, et les cavités aplaties les plus dangereuses. La définition d'un comportement isotrope le plus proche du comportement anisotrope obtenu permet de restituer ces tendances et de mesurer l'écart à l'isotropie du comportement obtenu.

Il apparaît que, dans l'espace des contraintes, l'anisotropie engendrée par la présence des cavités entraîne une rotation des équipotentiels telle que :

- \* si  $\lambda < 1$ , la contrainte imposée suivant l'axe de symétrie  $\Sigma_{zz} = S$  prend de l'importance au détriment de la contrainte radiale  $\Sigma_{xx} = T$  vis-à-vis de l'endommagement.

- \* si  $\lambda > 1$ , la tendance est inversée.

Nous avons ensuite étudié l'influence de cette anisotropie sur la croissance d'une cavité isolée initialement sphérique. Celle-ci dépend du chargement imposé :

- \* A haute triaxialité une cavité isolée dans une matrice de comportement *constant* dû à la présence de cavités ( $f = 0,05$ ) de rapport de forme  $\lambda$  croît de la façon suivante : son volume augmente d'autant moins vite et son excentricité d'autant plus vite que  $\lambda$  diminue.

- \* A faible triaxialité, cette tendance est inversée.

Finalement, l'analyse de la croissance de l'endommagement au cours du chargement a mis en évidence l'importance de la fraction initiale de cavités. Ceci montre l'importance d'une bonne connaissance de la phase de germination des cavités.

## **QUATRIEME CHAPITRE**

**COMPORTEMENT D'UN MATERIAU VISCOPLASTIQUE  
NON LINEAIRE ENDOMMAGE**





## CHAPITRE IV

### COMPORTEMENT D'UN MATERIAU VISCOPLASTIQUE

#### NON LINEAIRE ENDOMMAGE

I. INTRODUCTION .....	103
II. SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE .....	104
II.1. Méthodes "autocohérentes" à deux ou trois phases .....	104
II.2. Méthodes de perturbation du potentiel des contraintes .....	104
II.3. Méthode de GURSON et ses extensions .....	106
II.4. Méthodes de comparaison avec un matériau linéaire de référence .....	108
III. ETUDE DU COMPORTEMENT EFFECTIF D'UN MATERIAU PSEUDOPLASTIQUE ENDOMMAGE ISOTROPE .....	114
III.1. Application de la méthode de PONTE CASTAÑEDA à la méthode différentielle .....	114
III.2. Discussion des résultats .....	116
III.2.1. Comparaison des différents modèles .....	116
III.2.2. Influence de $m$ sur les équipotentiels .....	118
III.2.3. Cas particulier : comportement parfaitement plastique .....	119
IV. ETUDE DU COMPORTEMENT EFFECTIF D'UN MATERIAU LINEAIRE AVEC SEUIL ENDOMMAGE ISOTROPE .....	119
IV.1. Application de la méthode de PONTE CASTAÑEDA à la méthode différentielle .....	120
IV.2. Discussion des résultats .....	121
IV.2.1. Comparaison des différents modèles .....	121
IV.2.2. Analyse des équipotentiels .....	122
V. POTENTIEL AXISYMETRIQUE D'UNE MATRICE PSEUDOPLASTIQUE ENDOMMAGEE .....	123
V.1. Principe de la méthode .....	123
V.2. Discussion des résultats .....	125
V.2.1. Evolution des paramètres rhéologiques .....	125
V.2.2. Analyse des équipotentiels .....	125
VI. CONCLUSION .....	127



## I. Introduction

Le comportement linéaire de la matrice, étudié dans la partie précédente, est en général trop éloigné de la réalité. Nous nous intéressons donc maintenant à la détermination du comportement effectif d'un matériau *pseudoplastique incompressible* ou *linéaire avec seuil incompressible*, endommagé par la présence de cavités. Plusieurs difficultés liées au comportement non linéaire apparaissent lors de l'homogénéisation.

Un premier problème consiste à déterminer la forme du comportement macroscopique recherché. Par exemple, le comportement effectif d'un agrégat composé de deux phases pseudoplastiques de coefficients de sensibilité à la vitesse *différents* n'est plus a priori pseudoplastique. Notons cependant que pour des matériaux isotropes, lorsque les deux phases ont la même sensibilité à la vitesse, l'ensemble reste pseudoplastique de même sensibilité à la vitesse, si l'on néglige l'influence du troisième invariant du tenseur des contraintes (hypothèse discutée par DUVA et HUTCHINSON [1984]). Le comportement d'un matériau pseudoplastique contenant des cavités sphériques peut entrer dans cette hypothèse. La cavité est alors considérée comme une phase pseudoplastique de même sensibilité à la vitesse que la matrice mais de viscosité nulle.

D'autre part, si l'on utilise une méthode d'homogénéisation dérivée de la méthode autocohérente à deux phases (ou à trois phases), le calcul de l'étape de localisation dans une matrice pseudoplastique incompressible ne se résout analytiquement que pour des géométries unidimensionnelles : sphère creuse chargée par une contrainte hydrostatique, cylindre creux chargé de façon axisymétrique. Pour les autres géométries et types de chargement, la localisation doit être résolue de manière numérique (approche variationnelle, éléments finis, etc.).

Malgré ces difficultés, plusieurs méthodes ont été développées pour estimer ou encadrer le comportement macroscopique d'un matériau hétérogène non linéaire. Ces études concernent essentiellement des matériaux pseudoplastiques (dont les cas limites sont les comportements linéaire et parfaitement plastique).

## II. Synthèse bibliographique

Comme indiqué précédemment, une approche possible consiste à appliquer certaines méthodes décrites dans le cas linéaire, en effectuant le calcul de localisation de façon numérique.

### II.1. Méthodes "autocohérentes" à deux ou trois phases

En 1993, VERNUSSE a appliqué la méthode "autocohérente" à deux phases proposée par WALPOLE [1969] pour étudier le comportement macroscopique d'un alliage composé de deux phases incompressibles pseudoplastiques de *même* coefficient de sensibilité à la vitesse. L'auteur a effectué le calcul de localisation sur une inclusion *ellipsoïdale* de révolution dans une matrice pseudoplastique *isotrope* à l'aide d'un principe variationnel. La forme des phases n'étant pas sphérique, le comportement global est en toute rigueur axisymétrique. L'auteur a cependant supposé en première approximation le comportement effectif isotrope. Il a étudié les influences du coefficient de sensibilité à la vitesse, du facteur de forme et de la fraction volumique des phases sur ce comportement isotrope macroscopique. Lorsque  $m$  tend vers 0, VERNUSSE montre que les vitesses de déformation dans les phases molle et dure deviennent de plus en plus éloignées.

En 1991, BAO, HUTCHINSON et McMEEKING ont appliqué la méthode "autocohérente" à trois phases pour déterminer le comportement global d'un agrégat biphasé constitué de phases élastiques parfaitement plastiques. A la différence des auteurs précédents, la localisation est effectuée au moyen d'un calcul par éléments finis.

### II.2. Méthodes de perturbation du potentiel des contraintes

D'autres méthodes abordent la détermination du comportement non linéaire macroscopique en modifiant le potentiel des contraintes. En 1984, DUVA et HUTCHINSON ont calculé la perturbation du potentiel des contraintes  $\psi(\sigma)$  initialement isotrope incompressible due à la présence d'une faible fraction volumique  $f$  de cavités *sphériques*. Les auteurs ont insisté sur l'intérêt

de travailler sur le potentiel. En effet, l'étude porte ainsi sur une grandeur scalaire. La solution  $\Psi(\Sigma)$  (où  $\Sigma$  est le tenseur des contraintes macroscopique) se présente formellement comme suit :

$$\Psi(\Sigma) = \psi(\Sigma) + f \frac{\partial \Psi}{\partial f} \quad (1)$$

où  $\frac{\partial \Psi}{\partial f}$  est calculé par l'étude d'une cavité sphérique isolée dans une matrice pseudoplastique incompressible à l'aide du principe variationnel proposé par BUDIANSKY, HUTCHINSON et SLUTSKY [1982] (chapitre II). DUVA et HUTCHINSON montrent que la perturbation du potentiel vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial f} = \phi(\dot{\mathbf{E}}) - \frac{F_{\min}}{V_c} \quad (2)$$

où  $\phi(\dot{\mathbf{E}})$  est le potentiel des déformations de la matrice,  $V_c$  le volume de la cavité et  $F_{\min}$  la valeur du minimum de la fonctionnelle proposée par BUDIANSKY et al. [1982]. Notons de plus que  $\frac{\partial \Psi}{\partial f}$  est indépendant du volume de la cavité, car  $F_{\min}$  est proportionnel à  $V_c$ .

En suivant le même raisonnement, LEE et MEAR [1992] calculent la perturbation d'un potentiel initialement incompressible pseudoplastique due à la présence d'une faible fraction volumique de cavités. Le potentiel macroscopique  $\Psi(\Sigma)$  s'écrit donc en fonction du potentiel de la matrice vierge  $\psi(\sigma)$  et de la perturbation du potentiel due à la présence des cavités  $\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho}$  où  $\rho$  est une mesure de la fraction volumique de cavités :

$$\Psi(\Sigma) = \psi(\Sigma) + f \frac{\partial \Psi}{\partial f} = \psi(\Sigma) + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \quad (3)$$

$\rho$  est relié à la fraction volumique  $f$  de cavités par la relation  $f = \xi \rho$  avec :

$$\xi = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2} & \text{si } a > b \\ \lambda & \text{si } a < b \end{cases} \quad (4)$$

où  $a$  et  $b$  sont les demi-axes de l'ellipsoïde de révolution.

Les auteurs déterminent aussi le terme de perturbation par l'étude du champ de vitesse autour d'une cavité ellipsoïdale de révolution dans une

matrice *isotrope* incompressible pseudoplastique au moyen du même principe variationnel que celui utilisé par DUVA et HUTCHINSON [1984] (équation (2)). Les modes de vitesse utilisés pour la minimisation de la fonctionnelle restituent la solution exacte pour un matériau linéaire incompressible. L'optimisation proposée s'appuie sur 11 modes de vitesse (dont un seul correspond au changement de volume de la cavité). Le résultat obtenu de cette manière détermine un comportement macroscopique pseudoplastique *isotrope* compressible influencé par la forme des cavités.

En 1991, LEE et MEAR ont déjà appliqué cette approche pour étudier le comportement effectif d'un agrégat biphasé constitué de phases rigides pseudoplastiques de même coefficient de sensibilité à la vitesse. Pour atteindre des fractions volumiques plus importantes, les auteurs ont procédé par étapes en localisant, à chaque incrément de fraction volumique, dans la matrice de comportement obtenu à l'étape précédente. Ceci constitue donc un schéma comparable à la méthode différentielle.

### II.3. Méthode de GURSON et ses extensions

En 1977, GURSON a développé un autre modèle permettant de déterminer le potentiel d'un matériau poreux. Cet auteur a étudié une cavité isolée dans une matrice isotrope rigide parfaitement plastique ( $\bar{\sigma}_{vm} = \sigma_0$ ). Deux géométries sont considérées, une cavité cylindrique de section circulaire d'une part, et une cavité sphérique d'autre part. L'ensemble est soumis à un chargement axisymétrique  $\dot{\mathbf{E}}$ . Pour effectuer son calcul, GURSON a utilisé le principe du travail plastique maximum.

Dans le cas d'une cavité sphérique de rayon  $a$  contenue dans une sphère de matrice de rayon  $b$ , l'auteur considère un champ de vitesse comportant un terme de croissance volumique pure  $\dot{\mathbf{u}}^C$  et le champ homogène à l'infini  $\dot{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{x}}$ :

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{x}} + C \dot{\mathbf{u}}^C \quad (5)$$

L'optimisation d'une fonctionnelle permet alors d'obtenir le potentiel macroscopique suivant :

$$\Psi(\Sigma) = \left( \frac{\bar{\Sigma}_{vm}}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cosh \left( \frac{3 \Sigma_m}{2 \sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (6)$$

GURSON montre de plus que la loi de normalité existe pour le comportement macroscopique si elle est vérifiée à l'échelle microscopique. L'optimisation portant sur les modes de vitesse, le potentiel obtenu constitue une borne supérieure. Ce résultat restitue la solution exacte dans le cas d'une sphère creuse chargée par une contrainte hydrostatique. D'autre part, lorsque la fraction volumique de cavités est nulle, ce potentiel donne exactement le critère de von Mises.

Afin de mieux tenir compte des interactions entre les cavités, TVERGAARD [1981] a introduit trois nouveaux paramètres dans le critère de GURSON. Le potentiel modifié prend la forme suivante :

$$\Psi(\Sigma) = \left( \frac{\bar{\Sigma}_{vm}}{\sigma_0} \right)^2 + 2q_1 f \cosh \left( \frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right) - 1 - q_3 f^2 = 0 \quad (7)$$

Des études numériques effectuées sur un milieu élastoplastique comportant une double rangée périodique de cavités circulaires cylindriques, soumis à une contrainte uniaxiale ou biaxiale en déformation plane ont permis de déterminer ces paramètres :  $q_1 = 1,5$ ,  $q_2 = 1$ ,  $q_3 = q_1^2$ .

En 1989, LEBLOND et PERRIN ont vérifié l'"autocohérence" du critère proposé par TVERGAARD. Ils considèrent pour cela une cavité sphérique de rayon  $a$  au centre d'une sphère de matrice de rayon  $b$  soumise à une contrainte hydrostatique  $\Sigma_m$ . Dans le cas d'un matériau rigide parfaitement plastique, la solution du problème est :

$$\Sigma_m = \frac{2}{3} \sigma_0 \log \left( \frac{b^3}{a^3} \right) = -\frac{2}{3} \sigma_0 \log(f'') = \Sigma_m(f'') \quad (8)$$

où  $f''$  est la porosité due à la cavité centrale. Pour un matériau (dit de GURSON-TVERGAARD) dont le potentiel est donné par la relation (7) avec pour hypothèses supplémentaires  $q_2 = 1$  et  $q_3 = q_1^2$ , on cherche une solution sous la forme  $\Sigma_m = \Sigma_m(f', f'')$ .  $f'$  correspond à la porosité du matériau poreux (sans la grosse cavité), définie de sorte que la porosité totale s'écrive  $f = f' + f''$ . L'"autocohérence" est alors obtenue en faisant tendre  $b$  vers l'infini ; ainsi  $f'' = df'$  tend vers zéro. Il reste à identifier au premier ordre la charge limite du système  $\Sigma_m(f', df')$  à  $\Sigma_{G-T}(f' + df')$  d'un matériau de GURSON-TVERGAARD de même porosité totale. La valeur obtenue pour  $q_1$  est  $4/e$  soit environ 1,47, valeur proche de celle proposée par TVERGAARD.



Le critère de GURSON-TVERGAARD donne des résultats plus cohérents que celui de GURSON : nous verrons plus loin que le potentiel de GURSON peut dépasser la borne obtenue à l'aide de celle de HASHIN-SHTRIKMAN en linéaire. Cependant il ne restitue plus la solution exacte de la sphère creuse chargée de façon hydrostatique. En 1992, MICHEL et SUQUET ont modifié le potentiel de GURSON-TVERGAARD en conséquence. Ce nouveau potentiel coïncide avec celui de GURSON-TVERGAARD pour un chargement purement déviatorique, et avec celui de GURSON pour un chargement purement hydrostatique.

Le critère de GURSON a été largement utilisé depuis lors. Ainsi, NAGAKI, SOWERBY et GOYA [1991] l'ont modifié afin de prendre en compte l'anisotropie de distribution d'un réseau de cavités sphériques (anisotropie d'origine topologique). D'autre part, en 1993 GOLOGANU et al. ont étudié, au moyen d'un principe variationnel, un ellipsoïde de révolution creux formé d'une matrice parfaitement plastique sous un chargement axisymétrique. En suivant une approche similaire à celle proposée par GURSON les auteurs ont déterminé une extension de son critère au comportement axisymétrique (anisotropie d'origine morphologique).

#### II.4. Méthodes de comparaison avec un matériau linéaire de référence

Une classe de méthodes permettant d'obtenir le comportement effectif approché d'un composite non linéaire hétérogène consiste à le comparer avec un matériau linéaire. L'approche repose sur les propriétés variationnelles des potentiels :

$$\Psi(\Sigma) = \inf_{\sigma \in SA} \langle \psi(\sigma) \rangle \quad (9)$$

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) = \inf_{\dot{\mathbf{u}} \in CA} \langle \phi[\dot{\mathbf{e}}(\dot{\mathbf{u}})] \rangle \quad (10)$$

avec  $\langle h \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_m} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  où  $V$  est le volume total du V.E.R. et  $V_m$  le volume de matière du V.E.R.

$SA$  est l'ensemble des champs de contrainte statiquement admissibles

CA est l'ensemble des champs de vitesse cinématiquement admissibles

WILLIS [1989] a montré que les deux potentiels macroscopiques  $\Psi$  et  $\Phi$  ainsi définis sont conjugués l'un de l'autre pour chaque type de conditions aux limites : déformations uniformes ou contraintes uniformes. Il est maintenant bien connu que chaque type de conditions aux limites entraîne une définition différente des deux potentiels. Cependant, lorsque l'échelle des hétérogénéités devient petite vis-à-vis de la taille du V.E.R., les deux définitions sont équivalentes (au moins pour des matrices pseudoplastiques de coefficient de sensibilité à la vitesse non nul) (MICHEL et SUQUET [1992]).

*\* Proposition de PONTE CASTAÑEDA*

En 1985, TALBOT et WILLIS, puis WILLIS [1989] ont montré comment borner le potentiel recherché en lui soustrayant l'énergie effective d'un matériau linéaire *homogène* de référence. A la suite de ces travaux, PONTE CASTAÑEDA [1991, 1992] a modifié la forme variationnelle pour permettre la comparaison à un matériau de référence linéaire *hétérogène*. Cette analyse, fondée sur les propriétés de convexité du potentiel non linéaire, est facile d'emploi. Elle permet d'obtenir une borne (si le comportement de référence est une borne) ou une estimation (si le comportement de référence est une estimation) du potentiel macroscopique. Nous décrivons succinctement ci-dessous la mise en place du principe variationnel proposé par PONTE CASTAÑEDA [1991], s'appliquant aux matériaux *isotropes*. Cette approche sera spécifiée au cas d'une matrice de comportement non linéaire incompressible, endommagée par la présence de cavités.

Considérons un matériau hétérogène constitué d'une phase (1) de matrice isotrope incompressible de potentiel convexe :

$$\psi^{(1)}(\sigma) = g(\bar{\sigma}_{vm}) \quad (11)$$

et d'une phase (2), constituée de cavités, de potentiel :

$$\psi^{(2)}(\sigma) = \delta_0(\bar{\sigma}_{vm}) + \delta_0(\sigma_m) \quad (12)$$

avec :

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ +\infty & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Le potentiel effectif macroscopique  $\Psi(\Sigma)$  de ce matériau endommagé est défini, pour un volume unitaire, par l'équation (9) :

$$\Psi(\Sigma) = \inf_{\sigma \in SA} \int_V \sum_r \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \psi^{(r)}(\sigma) dV = \inf_{\sigma \in SA} \int_{V_m} \psi^{(1)}(\sigma) dV \quad (13)$$

où  $\chi^{(r)}(\mathbf{x})$  est la fonction indicatrice de la phase (r).

Considérons alors le potentiel quadratique d'un matériau hétérogène linéaire isotrope de comparaison (chapitre I), dont les phases ont *la même distribution* (même fonction indicatrice) que le matériau non linéaire :

$$\psi_{lin}(\sigma, \mathbf{x}) = \sum_r \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \psi_{lin}^{(r)}(\sigma) = \frac{\bar{\sigma}_{vm}^2}{6G(\mathbf{x})} + \frac{\sigma_m^2}{2\kappa(\mathbf{x})} \quad (14)$$

où  $G(\mathbf{x}) = \sum_r \chi^{(r)}(\mathbf{x}) G^{(r)} = \chi^{(1)}(\mathbf{x}) G^{(1)}$  et  $\kappa(\mathbf{x}) = \sum_r \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \kappa^{(r)} = \chi^{(1)}(\mathbf{x}) \kappa^{(1)}$  sont strictement positifs. Le potentiel effectif du matériau linéaire de comparaison est :

$$\Psi_{lin}(\Sigma) = \inf_{\sigma \in SA} \langle \psi_{lin}(\sigma) \rangle \quad (15)$$

La non linéarité du potentiel des contraintes est plus grande que quadratique lorsque la norme des contraintes devient grande. L'auteur est alors amené à définir la différence entre les potentiels des phases correspondantes des deux composites considérés de la façon suivante :

$$V^{(1)}(G^{(1)}) = \sup_{\sigma} \left\{ \psi_{lin}^{(1)}(\sigma) - \psi^{(1)}(\sigma) \right\} \quad (16)$$

$$V^{(2)} = 0$$

Lorsque le potentiel linéaire  $\psi_{lin}^{(1)}$  peut s'écrire sous la forme  $s^2/(6 G^{(1)})$  ( $s = \bar{\sigma}_{vm}$  par exemple), l'équation (16) devient :

$$V^{(1)}(G^{(1)}) = \sup_s \left\{ \frac{s^2}{6G^{(1)}} - g(s) \right\} \quad (17)$$

$V^{(1)}(G^{(1)})$  est donc la transformée de Legendre de  $g(s)$  (PONTE CASTAÑEDA [1991]) ; inversement sachant que  $g$  est convexe :

$$g(s) = \sup_{G^{(1)} > 0} \left\{ \frac{s^2}{6G^{(1)}} - V^{(1)}(G^{(1)}) \right\} \quad (18)$$

Sachant que  $V(G, \kappa) = \sum_r \chi^{(r)}(\mathbf{x}) V^{(r)}(G^{(r)}, \kappa^{(r)}) = \sup_{\sigma} \{ \Psi_{\text{lin}}(\sigma, \mathbf{x}) - \psi(\sigma, \mathbf{x}) \}$ , il suit :

$$\langle V(G, \kappa) \rangle = \sum_r f^{(r)} V^{(r)}(G^{(r)}, \kappa^{(r)}) = f^{(1)} V^{(1)}(G^{(1)}) \quad (19)$$

où  $f^{(r)} = \langle \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \rangle$  est la fraction volumique de la phase (r)

La définition de  $V(G, \kappa)$  entraîne finalement :

$$\Psi(\Sigma) \geq \Psi_{\text{lin}}(\Sigma) - \langle V(G, \kappa) \rangle \quad \forall \Sigma \text{ et } \forall G^{(r)}, \kappa^{(r)} \text{ positifs} \quad (20)$$

d'où pour une matrice incompressible contenant des cavités ( $\kappa^{(1)} \rightarrow \infty$ ,  $G^{(2)} = \kappa^{(2)} = 0$ ) :

$$\Psi(\Sigma) \geq \Psi_-(\Sigma) = \sup_{G^{(1)}} \{ \Psi_{\text{lin}}(\Sigma) - f^{(1)} V^{(1)}(G^{(1)}) \} \quad (21)$$

Si une borne inférieure est connue pour le matériau de comportement linéaire, elle se transforme à l'aide de ce formalisme en une borne inférieure pour le comportement non linéaire. De même, une estimation de  $\Psi_{\text{lin}}(\Sigma)$  donne une estimation de  $\Psi(\Sigma)$ . En revanche, il résulte de l'équation (21) qu'une borne supérieure de  $\Psi_{\text{lin}}(\Sigma)$  entraîne aussi une estimation et non pas une borne supérieure pour  $\Psi(\Sigma)$ .

A l'aide des propriétés de convexité du potentiel de la matrice vierge et des propriétés de la transformée de Legendre, PONTE CASTAÑEDA a finalement montré que l'équation (21) est équivalente à :

$$\Psi(\Sigma) \geq f^{(1)} \sup_{G^{(1)}} \left\{ \frac{s^2}{6G^{(1)}} - V^{(1)}(G^{(1)}) \right\} = f^{(1)} g(s) \quad (22)$$

*Le potentiel ainsi obtenu a donc la même forme que le potentiel de la matrice vierge ; seule la variable s a changé d'interprétation.*

En résumé, l'application de la méthode de PONTE CASTAÑEDA, particulièrement simple d'emploi, se déroule de la façon suivante pour les matériaux poreux :

i) Ecrire le potentiel *convexe* des contraintes de la matrice vierge isotrope incompressible sous la forme suivante :

$$\psi^{(1)}(\sigma) = g(\bar{\sigma}_{\text{vm}}) \quad (23)$$

ii) Choisir une borne ou une estimation du potentiel du matériau linéaire hétérogène de référence, ce qui détermine la fonction  $s(\Sigma, f)$  ; par exemple la borne de VOIGT :

$$\Psi_{\text{lin}}(\Sigma) \geq \frac{\bar{\Sigma}_{\text{vm}}^2}{6G_V} \text{ avec } G_V = f^{(1)} G^{(1)} \quad (24)$$

$$\text{soit} \quad s = \frac{\bar{\Sigma}_{\text{vm}}}{f^{(1)}} \quad (25)$$

iii) Appliquer l'équation (22) :

$$\Psi(\Sigma) \geq \Psi^V(\Sigma) = f^{(1)} g(s) = f^{(1)} g\left(\frac{\bar{\Sigma}_{\text{vm}}}{f^{(1)}}\right) \quad \text{pour VOIGT} \quad (26)$$

Pour une matrice vierge de comportement pseudoplastique  $\psi^{(1)}(\sigma) = \frac{1}{(k_M)^{1/m}} \left(\frac{m}{m+1}\right) (\bar{\sigma}_{\text{vm}})^{\frac{m+1}{m}}$ , l'équation (26) donne en utilisant la borne de VOIGT :

$$\Psi(\Sigma) \geq \Psi^V(\Sigma) = \frac{f^{(1)}}{(k_M)^{1/m}} \left(\frac{m}{m+1}\right) \left(\frac{\bar{\Sigma}_{\text{vm}}}{f^{(1)}}\right)^{\frac{m+1}{m}} \quad (27)$$

Cette borne est identique à celle obtenue en utilisant le principe de minimum d'énergie potentielle et en supposant le champ de vitesse de déformation uniforme dans le matériau. Ce résultat correspond donc bien à la borne de VOIGT non linéaire.

L'auteur applique alors cette méthode à d'autres résultats concernant les matériaux hétérogènes linéaires constitués d'une matrice incompressible contenant des cavités : borne supérieure de HASHIN-SHTRIKMAN, approximation autocohérente à deux phases.

#### \* Proposition de SUQUET

En 1993, SUQUET a proposé une approche beaucoup plus simple que la précédente dans le cas particulier des matériaux pseudoplastiques hétérogènes. L'idée est de comparer le potentiel macroscopique du matériau non linéaire

$\Psi(\Sigma)$ , homogène de degré  $m+1$  en  $\Sigma$ , à la quantité  $[\Psi_{\text{lin}}(\Sigma)]^{(m+1)/2}$  déduite du potentiel d'un matériau hétérogène linéaire de référence. *Ceci a pour avantage de comparer deux grandeurs homogènes de même ordre en  $\Sigma$ . Aucune hypothèse n'est faite sur l'arrangement des phases des deux composites. Le développement du calcul utilise l'inégalité de Hölder :*

$$\langle f \cdot g \rangle \leq \langle |f|^r \rangle^{1/r} \langle |g|^s \rangle^{1/s} ; \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1 \quad (28)$$

appliqué à :

$$f(x) = \left[ \frac{3}{2} G(x) \dot{\epsilon}(\dot{u}) \right]^{\frac{m+1}{2}} \quad \text{et} \quad g(x) = k(x) \left[ \frac{3}{2} G(x) \right]^{\frac{-(m+1)}{2}} \quad (29)$$

$$r = \frac{2}{m+1} \quad \text{et} \quad s = \frac{2}{1-m}$$

où  $G(x)$  est le module de cisaillement du matériau linéaire de comparaison (matrice incompressible (1) contenant une fraction volumique  $f$  de cavités (2) de formes quelconques). En choisissant  $G^{(1)} = 2/3$  de l'unité de contrainte, les résultats se simplifient fortement :

$$\Phi(\dot{\mathbf{E}}) \leq \frac{k_M}{m+1} \dot{\mathbf{E}}_{\text{eq}}^{m+1} \quad (30)$$

avec

$$\dot{\mathbf{E}}_{\text{eq}} = \left[ W_0(\dot{\mathbf{E}}) (1-f)^{\frac{1-m}{1+m}} \right]^{1/2} \quad (31)$$

où  $W_0$  est l'énergie de déformation effective du matériau linéaire de comparaison. Cette relation est valable quelle que soit la forme des cavités. La relation (30) offre donc une borne supérieure du potentiel des vitesses de déformation. Cela correspond bien à une borne inférieure du potentiel des contraintes. L'auteur montre alors que les extensions au cas pseudoplastique poreux des bornes de VOIGT et de HASHIN-SHTRIKMAN obtenues par sa méthode sont identiques à celles données par PONTE CASTAÑEDA [1991].

### III. Etude du comportement effectif d'un matériau pseudoplastique endommagé isotrope

Le but de cette section est d'appliquer le principe variationnel proposé par PONTE CASTAÑEDA [1991] aux modèles présentés auparavant, afin de déterminer les grandeurs rhéologiques  $k$  et  $y$  du comportement pseudoplastique isotrope compressible proposé dans le deuxième chapitre :

$$\bar{\Sigma}_{\dot{\epsilon}q} = k \dot{\bar{E}}_{\dot{\epsilon}q}^m \quad (32)$$

où 
$$\bar{\Sigma}_{\dot{\epsilon}q} = \sqrt{\bar{\Sigma}_{vm}^2 + (\Sigma_m / y)^2} \quad \text{et} \quad \dot{\bar{E}}_{\dot{\epsilon}q} = \sqrt{\dot{\bar{E}}_{vm}^2 + (y \dot{E}_{kk})^2}$$

Les approches précédentes portent sur le potentiel macroscopique des contraintes  $\Psi(\Sigma)$ . Celui-ci prend la forme suivante à l'aide de nos notations :

$$\Psi(\Sigma) = \frac{m}{k^{1/m}(m+1)} (\bar{\Sigma}_{vm})^{\frac{m+1}{m}} \left[ 1 + \frac{1}{y^2} \left( \frac{\Sigma_m}{\bar{\Sigma}_{vm}} \right)^2 \right]^{\frac{m+1}{2m}} \quad (33)$$

Cette équation va permettre d'identifier les grandeurs et de comparer les modèles.

#### III.1. Application de la méthode de PONTE CASTAÑEDA à la méthode différentielle

Le troisième chapitre a permis de déterminer au moyen de la méthode différentielle les grandeurs rhéologiques  $k(f) = 3 G(f)$  et  $\kappa(f)$  d'un matériau viscoplastique linéaire contenant une fraction volumique  $f$  de cavités. Il est possible d'utiliser cette approximation afin d'obtenir une estimation du comportement effectif d'un matériau isotrope pseudoplastique poreux. En effet, l'approximation par la méthode différentielle du potentiel macroscopique du matériau poreux linéaire s'écrit :

$$\Psi_{lin}^{MD}(\Sigma) = \frac{\bar{\Sigma}_{vm}^2}{6G(f)} + \frac{\Sigma_m^2}{2\kappa(f)} \quad (34)$$

pour une matrice initialement incompressible caractérisée par  $G_M$ . Cette expression est de la forme :

$$(1-f) \frac{s^2}{6G_M} \quad (35)$$

avec 
$$s^2 = \frac{G_M}{(1-f)G(f)} \left[ \bar{\Sigma}_{vm}^2 + \frac{3G(f)}{\kappa(f)} \Sigma_m^2 \right] \quad (36)$$

Le potentiel de la matrice pseudoplastique incompressible s'écrit :

$$\psi^{(1)}(\sigma) = g(\bar{\sigma}_{vm}) = \frac{m}{k_M^{1/m}(m+1)} (\bar{\sigma}_{vm})^{\frac{m+1}{m}} \quad (37)$$

où  $g$  est convexe. Il vient alors de l'équation (26) :

$$\Psi^{MD}(\Sigma) = (1-f) g \left( \sqrt{\frac{G_M}{(1-f)G(f)} \left[ \bar{\Sigma}_{vm}^2 + \frac{3G(f)}{\kappa(f)} \Sigma_m^2 \right]} \right) \quad (38)$$

Ceci est donc une extension de la méthode différentielle au comportement pseudoplastique.

Il vient finalement :

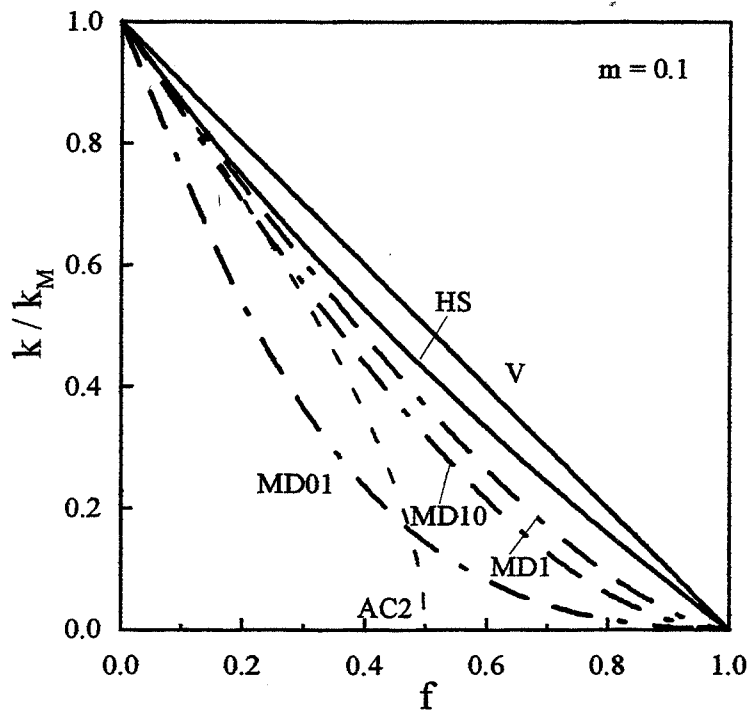
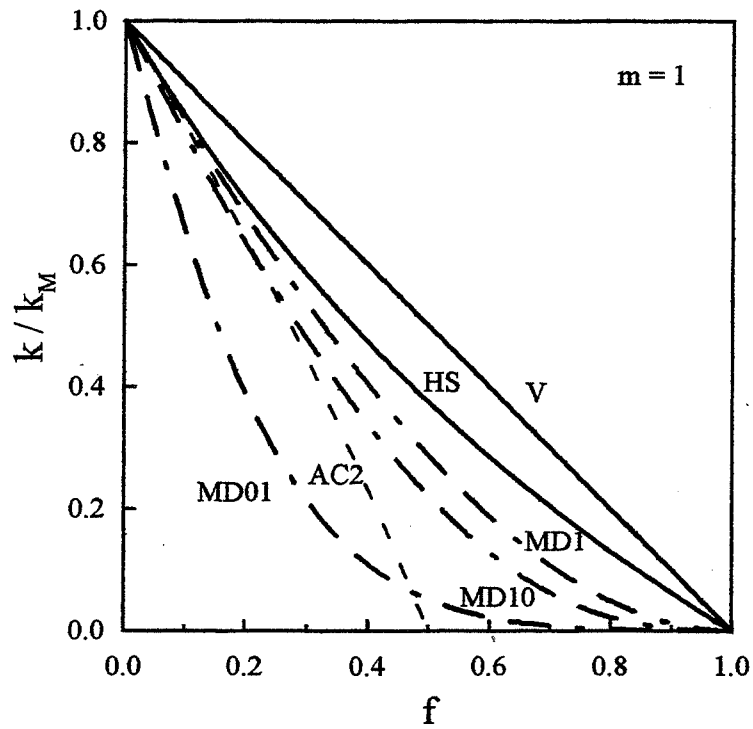
$$\Psi^{MD}(\Sigma) = \frac{m(1-f)^{\frac{m-1}{2m}}}{(m+1)(k_M)^{1/m}} \left( \frac{G_M}{G(f)} \right)^{\frac{m+1}{2m}} (\bar{\Sigma}_{vm})^{\frac{m+1}{m}} \left[ 1 + \frac{3G(f)}{\kappa(f)} \left( \frac{\Sigma_m}{\bar{\Sigma}_{vm}} \right)^2 \right]^{\frac{m+1}{2m}} \quad (39)$$

L'identification avec l'équation (33) permet de déterminer les approximations  $k_{MD}$  et  $y_{MD}$  :

$$\begin{cases} \frac{k_{MD}}{k_M} = (1-f)^{\frac{1-m}{2}} \left[ \frac{G(f)}{G_M} \right]^{\frac{1+m}{2}} \\ y_{MD} = \sqrt{\frac{\kappa(f)}{3G(f)}} \end{cases} \quad (40)$$

Il ressort de ces deux relations que *seul*  $k_{MD}$  dépend du coefficient de sensibilité à la vitesse  $m$ .





**Figure 1 : Influence de  $f$  sur la raideur d'un matériau pseudoplastique compressible**

V : Borne de Voigt

HS : Borne de Hashin-Shtrikman (Ponte Castaneda [1991])

AC2 : Approximation autocohérente à deux phases (Ponte Castaneda [1991])

MD1 : Méthode différentielle (isotrope  $\lambda = 1$ )

MD10 : Méthode différentielle (isotrope le plus proche  $\lambda = 10$ )

MD01 : Méthode différentielle (isotrope le plus proche  $\lambda = 0,1$ )

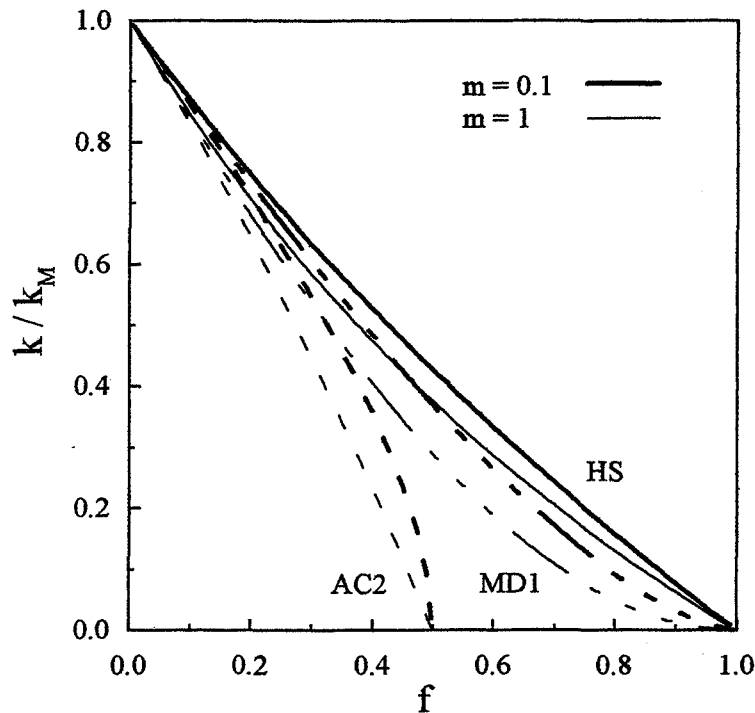
Lors de l'exploitation des résultats, il sera possible de tenir compte de la forme des cavités, en prenant pour approximations de  $G(f,\lambda)$  et  $\kappa(f,\lambda)$  les valeurs obtenues à l'aide du comportement isotrope le plus proche (chapitre III). Nous notons dans la suite  $k_{MD\lambda}$  et  $y_{MD\lambda}$  les approximations obtenues à l'aide de la méthode différentielle, associée au calcul du comportement isotrope le plus proche, pour des cavités de rapport de forme  $\lambda$ .

## III.2. Discussion des résultats

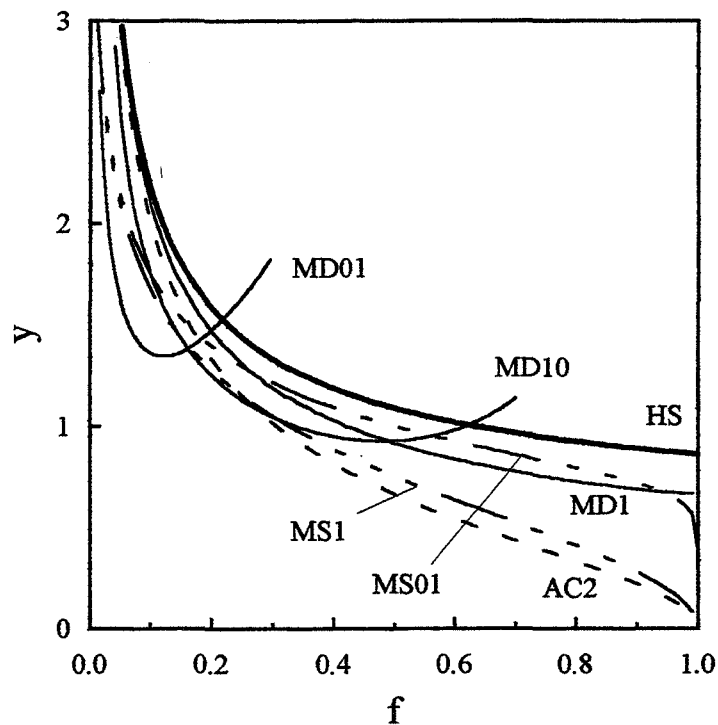
### III.2.1. Comparaisons des différents modèles

En mettant les résultats de la littérature sous la forme de l'équation (33), il est possible de comparer les différentes estimations (ou bornes) des grandeurs rhéologiques  $k$  et  $\kappa$  d'un matériau endommagé constitué d'une matrice pseudoplastique incompressible et de cavités :

	$k / k_M$	$y$
PONTE CASTAÑEDA + VOIGT [1991]	$k_V / k_M = 1 - f$	$y_V \rightarrow +\infty$
PONTE CASTAÑEDA + HASHIN-SHTRIKMAN [1991]	$\frac{k_{HS}}{k_M} = \frac{1-f}{(1+2f/3)^{(m+1)/2}}$	$y_{HS} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1+2f/3}{f}}$
PONTE CASTAÑEDA + autocohérent à 2 phases [1991]	$\frac{k_{AC2}}{k_M} = (1-f)^{\frac{1-m}{2}} \left[ \frac{1-2f}{1-f/3} \right]^{\frac{1+m}{2}}$	$y_{AC2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1-f}{f}}$
MICHEL et SUQUET [1992]	$k_{MS} = k_{HS}$	$y_{MS} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1+2f/3}{(1-f)^{2/(m+1)}}} \ln^2(f)$
Présent travail : PONTE CASTAÑEDA + schéma différentiel [1994]	$\frac{k_{MD\lambda}}{k_M} = (1-f)^{\frac{1-m}{2}} \left[ \frac{G(f,\lambda)}{G_M} \right]^{\frac{1+m}{2}}$	$y_{MD\lambda} = \sqrt{\frac{\kappa(f,\lambda)}{3G(f,\lambda)}}$
Présent travail : PONTE CASTAÑEDA + solution diluée [1994]	$\frac{k_{SD}}{k_M} = (1-f)^{\frac{1-m}{2}} \left[ 1 - \frac{5}{3}f \right]^{\frac{1+m}{2}}$	$y_{SD} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1-f/4}{f}}$



**Figure 2 :** Influence de  $m$  sur la raideur d'un matériau pseudoplastique compressible pour trois modèles :  
 HS : Borne de Hashin-Shtrikman (Ponte Castaneda [1991]) (traits continus)  
 AC2 : Modèle autocohérent à deux phases (Ponte Castaneda [1991] , traits interrompus réguliers)  
 MD1 : Méthode différentielle (isotrope :  $\lambda = 1$  , traits interrompus irréguliers)



**Figure 3 :** Variation du paramètre  $y$  en fonction de la fraction volumique de cavités  
 HS : Borne de Hashin-Shtrikman (Ponte Castaneda : traits continus gras)  
 AC2 : Approximation autocohérente à deux phases (Ponte Castaneda : trait interrompu régulier)  
 MD1 : Méthode différentielle (isotrope :  $\lambda = 1$  : trait continu fin)  
 MD10 : Méthode différentielle (isotrope le plus proche  $\lambda = 10$  : trait continu fin)  
 MD01 : Méthode différentielle (isotrope le plus proche  $\lambda = 0,1$  : trait continu fin)  
 MS : Modification de HS proposée par Michel et Suquet pour restituer la solution exacte de la sphère creuse sous traction hydrostatique (traits interrompus irréguliers) :  
 MS1 calculé pour  $m=1$  ; MS01 calculé pour  $m=0,1$

Seule la valeur de  $\gamma$  obtenue par MICHEL et SUQUET [1992] implique une dépendance de ce paramètre en fonction du coefficient de sensibilité à la vitesse  $m$ .

#### *\* Variation de la viscosité $k$*

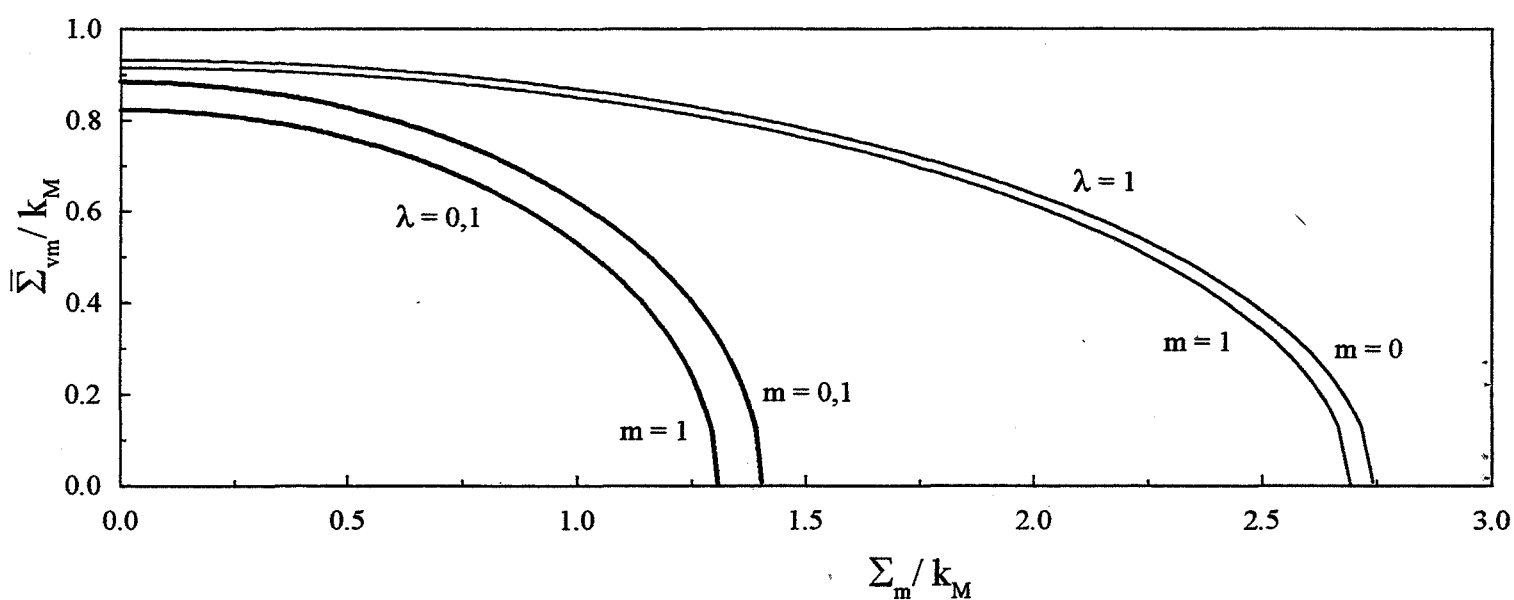
La figure 1 présente les différentes approximations de  $k$  en fonction de la fraction volumique de cavités pour deux sensibilités à la vitesse  $m = 1$  (linéaire) et  $m = 0,1$ . Toutes les approximations proposées se situent sous la borne de HASHIN-SHTRIKMAN. Lorsque le coefficient de sensibilité à la vitesse décroît, le faisceau de courbes se resserre. La comparaison des courbes  $MD_1$ ,  $MD_{10}$  et  $MD_{0,1}$  restitue un résultat déjà observé au chapitre 3 :  $k$  diminue plus vite pour des cavités plus aplaties ( $\lambda = 0,1$ ). Il est moins affecté par des cavités sphériques.

L'influence de  $m$  est plus facilement visible sur la figure 2. Lorsque  $m$  diminue,  $k$  augmente pour une fraction volumique donnée, quel que soit le modèle utilisé. *La porosité a une influence plus importante sur  $k$  lorsque le comportement de la matrice est plus proche d'un comportement linéaire.*

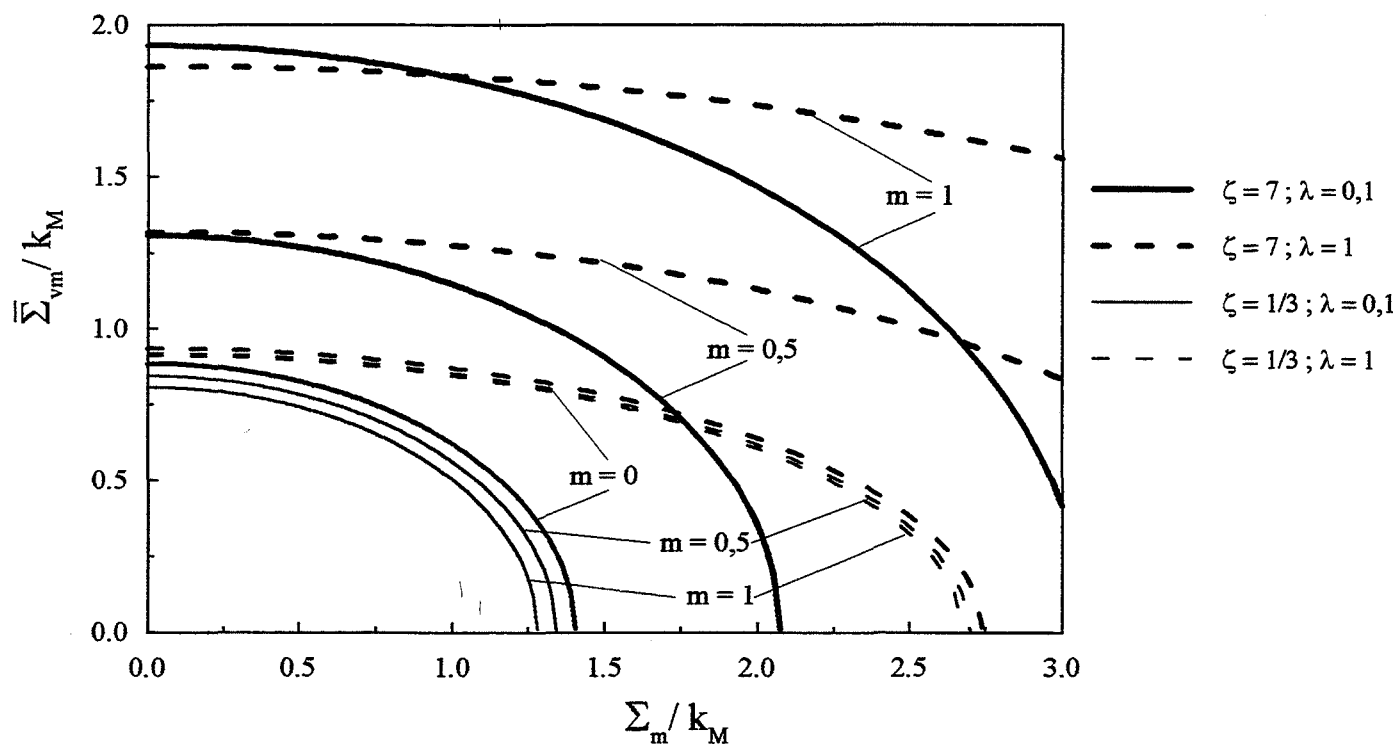
#### *\* Variation du paramètre $\gamma$*

Le paramètre rhéologique  $\gamma$  est porté sur la figure 3 en fonction de la fraction volumique de cavités. Lorsque celle-ci est supérieure à 0,1, la tendance observée au moyen de l'approximation isotrope la plus proche pour des cavités de forme non sphérique ( $\lambda = 0,1$  et  $\lambda = 10$ ) n'est plus vraisemblable :  $\gamma$  croît avec  $f$ . Ceci impliquerait que le matériau devienne de moins en moins compressible pour une fraction volumique croissante. Cependant, pour les fractions volumiques nous concernant ( $f < 0,05$ ) les tendances sont cohérentes. La matrice est d'autant plus compressible, à  $f$  donné, que les cavités sont plus aplaties.

Pour des cavités sphériques, aux faibles porosités, l'approximation de MICHEL et SUQUET [1992] est celle qui décroît le plus rapidement en fonction de  $f$ . Elle engendre donc une compressibilité globale d'autant plus importante. Leur résultat, fonction de  $m$ , prévoit une compressibilité moins importante lorsque le coefficient de sensibilité à la vitesse diminue.



**Figure 4 :** Influence de  $m$  sur les équipotentiels pour  $\bar{E}_{eq} = 1$  et une porosité de 5%



**Figure 5 :** Influence de  $m$  sur les équipotentiels pour  $\bar{E}_{zz} = 1$  et un taux de triaxialité imposé égal à 7 (traits gras) et 1/3 (traits fins). Pour  $m = 0$ , la vitesse de déformation de référence ainsi que la triaxialité n'ont pas d'influence.

A part ce cas particulier,  $y$  est indépendant de  $m$ . On peut alors calculer la valeur correspondante de  $v$  pour un comportement linéaire. En effet, on a dans ce cas  $y^2 = 2 (1 + v) / [9 (1 - 2 v)]$ . Ceci permet d'avoir une idée plus habituelle de l'importance de la compressibilité. Pour une fraction volumique  $f = 0,05$ , le coefficient de Poisson visqueux varie entre 0,481 pour la borne de HASHIN et SHTRIKMAN et 0,437 pour l'approximation  $MD_{0,1}$ .

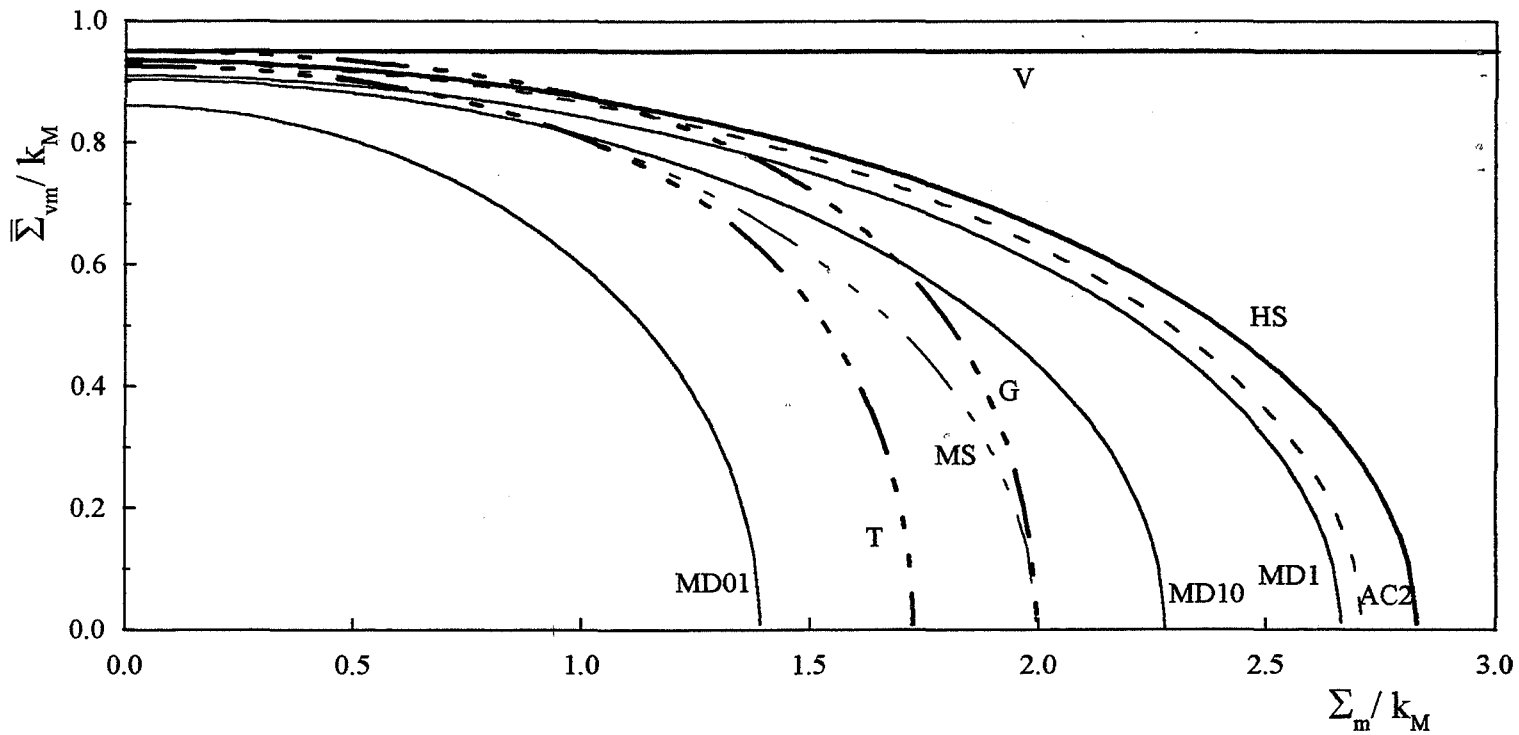
### III.2.2. Influence de $m$ sur les équipotentiellles

La grandeur  $\bar{\Sigma}_{\dot{\epsilon}_{eq}}$  est portée sur la figure 4 pour une vitesse de déformation  $\dot{\bar{E}}_{\dot{\epsilon}_{eq}}$  unitaire. Les courbes sont calculées pour une porosité  $f = 0,05$  pour des cavités sphériques ( $\lambda = 1$ ) ou aplaties ( $\lambda = 0,1$ ) au moyen de la méthode différentielle et du comportement isotrope le plus proche. L'influence de  $m$  est alors faible. Les équipotentiellles sont plus importantes lorsque  $m$  diminue.

En revanche, si le chargement imposé reste le couple  $(\zeta^\infty, \dot{E}_{zz})$  avec  $\dot{E}_{zz}$  unitaire, on a :

$$\bar{\Sigma}_{\dot{\epsilon}_{eq}} = k \left[ 3y \frac{\sqrt{y^2 + \zeta^{\infty 2}}}{3y^2 + \zeta^\infty} \right]^m \quad (41)$$

Lorsque  $m$  est différent de 0, l'influence de la triaxialité imposée apparaît. Les équipotentiellles correspondantes sont portées sur la figure 5 pour deux triaxialités imposées (1/3 et 7) et pour deux formes de cavités ( $\lambda = 1$  et 0,1). Pour une forme de cavité donnée, la courbe correspondant à  $m = 0$  est donc indépendante de la triaxialité imposée. Lorsque  $\zeta^\infty$  est élevée, les courbes se situent au dessus de la courbe  $m = 0$ , en revanche pour des triaxialités faibles elles se situent en dessous. On observe donc une inversion de tendance entre les faibles et les hautes triaxialités lorsque le comportement est compressible pour un chargement mixte imposé. D'autre part, on note que l'influence de  $m$  est beaucoup plus importante lorsque la triaxialité est élevée.



**Figure 6 :** Frontières d'écoulement d'un matériau parfaitement plastique pour une porosité de 5%

- V : Borne de Voigt (trait continu gras)
- HS : Borne de Hashin-Shtrikman (Ponte Castaneda) = Qiu et Weng [1991] (trait continu gras)
- AC2 : Approximation autocohérente à deux phases (Ponte Castaneda) (trait interrompu régulier)
- G : Gurson (trait interrompu irrégulier gras)
- T : Tvergaard ( $q_1 = 1,5$  ;  $q_2 = 1$  ;  $q_3 = 2,25$ ) (trait interrompu irrégulier gras)
- MD1 : Méthode différentielle (isotrope :  $\lambda = 1$  , trait continu fin)
- MD10 : Méthode différentielle (isotrope le plus proche  $\lambda = 10$  , trait continu fin)
- MD01 : Méthode différentielle (isotrope le plus proche  $\lambda = 0,1$  , trait continu fin)
- MS : Modification de HS proposée par Michel et Suquet pour donner la solution exacte de la sphère creuse sous traction hydrostatique (trait interrompu irrégulier fin)

### III.2.3. Cas particulier : le comportement parfaitement plastique

Lorsque  $m = 0$ , le comportement effectif du matériau endommagé s'écrit  $\bar{\Sigma}_{\text{eq}} = k$ .  $\bar{\Sigma}_{\text{eq}}$  décrit alors la frontière d'écoulement du matériau endommagé. Les résultats peuvent être comparés aux critères de GURSON et GURSON-TVERGAARD. Les différentes frontières d'écoulement sont portées sur la figure 6 pour une fraction volumique de cavité  $f = 0,05$ .

Le seuil proposé par MICHEL et SUQUET part de celui de HASHIN-SHTRIKMAN lorsque  $\Sigma_m = 0$  et rejoint la solution de GURSON pour  $\bar{\Sigma}_{\text{vm}} = 0$  (solution exacte de la sphère creuse sous un chargement hydrostatique). Lorsque le chargement se rapproche d'un chargement purement déviatorique, on note que le critère de GURSON dépasse la borne de HASHIN-SHTRIKMAN. En revanche, l'amélioration de TVERGAARD ne présente plus ce défaut.

Notre proposition reste assez proche de l'approximation autocohérente à deux phases. Cependant, l'influence de la forme des cavités (par le biais du comportement isotrope le plus proche) s'avère très importante. Ainsi, pour des cavités sphériques notre critère est peu éloigné de la borne de HASHIN-SHTRIKMAN, alors que pour des cavités aplaties de rapport de forme  $\lambda = 0,1$ , le critère est le plus restrictif de ceux proposés.

En 1993, QIU et WENG ont proposé une méthode d'estimation du comportement non linéaire au moyen de modules sécants. Dans le cas de cavités sphériques dans une matrice rigide parfaitement plastique leur résultat correspond à la borne de HASHIN-SHTRIKMAN proposée par PONTE CASTAÑEDA.

## IV. Etude du comportement effectif d'un matériau linéaire avec seuil endommagé isotrope

Le même cheminement peut être appliqué pour déterminer le comportement endommagé d'une matrice de comportement initial linéaire avec seuil. Le potentiel de la matrice vierge isotrope incompressible s'écrit :

$$\psi^{(1)}(\bar{\sigma}_{\text{vm}}) = g(\bar{\sigma}_{\text{vm}}) = \frac{1}{\beta^M} \left( \frac{\bar{\sigma}_{\text{vm}}^2}{2} - \sigma_0^M \bar{\sigma}_{\text{vm}} \right) \quad (42)$$



Le potentiel de la matrice endommagée s'écrit, en utilisant les notations proposées au chapitre II ( $\bar{\Sigma}_{\dot{\epsilon}q} = \sigma_0 + \beta \dot{\bar{E}}_{\dot{\epsilon}q}$ ) :

$$\Psi(\Sigma) = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\bar{\Sigma}_{vm}^2 + (\Sigma_m/y)^2}{2} - \sigma_0 \sqrt{\bar{\Sigma}_{vm}^2 + (\Sigma_m/y)^2} \right] \quad (43)$$

Ceci suppose toutefois qu'une matrice vierge de comportement linéaire avec seuil, endommagée par des cavités, conserve bien un comportement linéaire avec seuil.

#### IV.1. Application de la méthode de PONTE CASTAÑEDA à la méthode différentielle

En appliquant la méthode d'approximation de PONTE CASTAÑEDA à ce comportement, il est possible de démontrer que la matrice endommagée reste à comportement linéaire avec seuil et d'obtenir des estimations de  $\beta$ ,  $\sigma_0$  et  $y$ . Toute estimation, ou borne, du comportement linéaire isotrope de référence se présente sous la forme :

$$\Psi_{lin} = \frac{\bar{\Sigma}_{vm}^2}{6G} + \frac{\Sigma_m^2}{2\kappa} = (1-f) \frac{s^2}{6G_M} \quad (44)$$

avec

$$s^2 = \frac{G_M}{(1-f)G(f)} \left[ \bar{\Sigma}_{vm}^2 + \frac{3G(f)}{\kappa(f)} \Sigma_m^2 \right] \quad (37)$$

Les bornes ou les estimations du potentiel du matériau linéaire avec seuil endommagé prennent la forme suivante :

$$\Psi(\Sigma) = (1-f)g(s)$$

où  $g$  est maintenant défini par l'équation (42). La forme de ce dernier est donc conservée.

## IV.2. Discussion des résultats

## IV.2.1. Comparaison des différents modèles

L'identification avec l'équation (43) permet alors de déterminer les grandeurs souhaitées. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous :

	$\sigma_0/\sigma_0^M$	$\beta/\beta^M$	y
VOIGT	1-f	1-f	$+\infty$
HASHIN-SHTRIKMAN	$\frac{1-f}{\sqrt{1+2f/3}}$	$\frac{1-f}{1+2f/3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1+2f/3}{f}}$
Autocohérent à 2 phases	$\sqrt{\frac{(1-2f)(1-f)}{1-f/3}}$	$\frac{1-2f}{1-f/3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1-f}{f}}$
Solution diluée	$\sqrt{(1-5f/3)(1-f)}$	1-5f/3	$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1-f/4}{f}}$
Méthode différentielle	$\sqrt{(1-f)\frac{G(f,\lambda)}{G_M}}$	$\frac{G(f,\lambda)}{G_M}$	$\sqrt{\frac{\kappa(f,\lambda)}{3G_M}}$

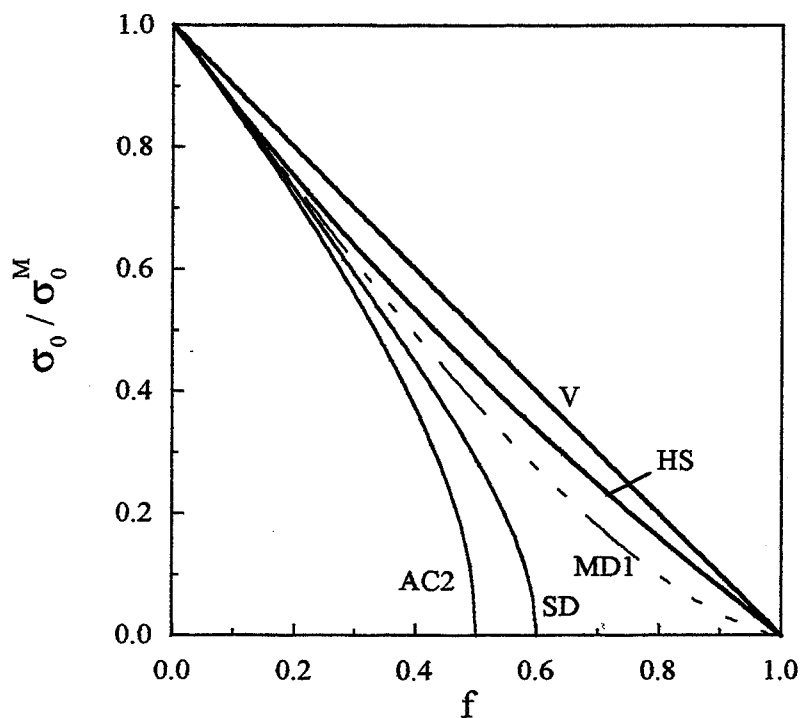
La méthode utilisée garde la forme du comportement, seule la norme des contraintes (s) est modifiée par le modèle choisi. Ceci entraîne que pour tous les modèles la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_0^M} / \sqrt{(1-f)\frac{\beta}{\beta^M}} = 1$$

La comparaison avec les résultats obtenus pour le comportement pseudoplastique montre que :

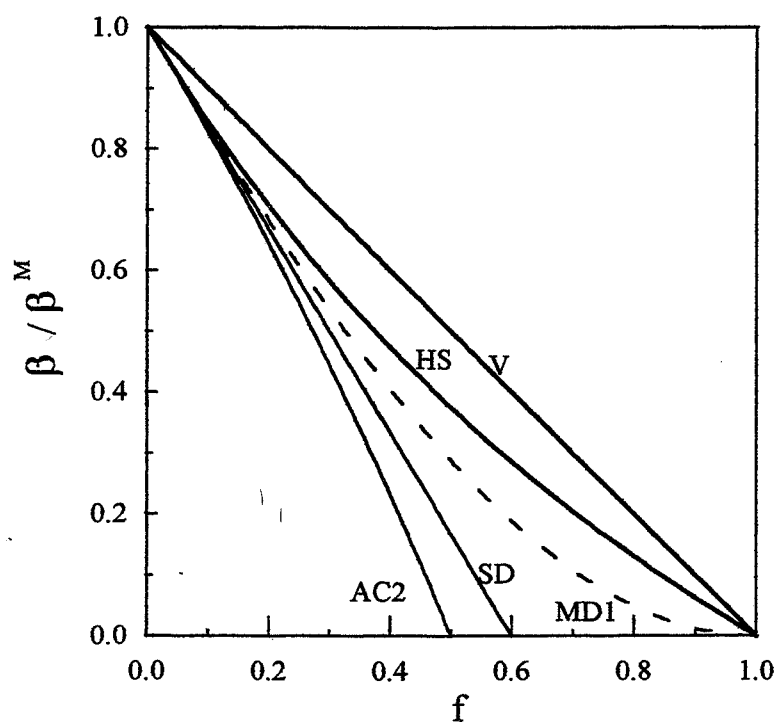
- \* les valeurs de y sont les même pour les deux comportements : elles sont *indépendantes* de la non linéarité du comportement

## COMPORTEMENT LINEAIRE AVEC SEUIL ENDOMMAGE



**Figure 7a :** Influence de  $f$  sur  $\sigma_0^M$

V : Borne de Voigt  
 HS : Borne de Hashin-Shtrikman  
 AC2 : Modèle autocohérent à deux phases  
 SD : Solution diluée  
 MD1 : Méthode différentielle (isotrope :  $\lambda = 1$ )



**Figure 7b :** influence de  $f$  sur  $\beta$

- \* les valeurs de  $\beta$  (loi linéaire avec seuil) sont identiques à celles de  $k$  (loi pseudoplastique) pour  $m = 1$  :  $\beta$  est *indépendant* du seuil de la matrice vierge  $\sigma_0^M$
- \* la contrainte de seuil du matériau endommagé est *indépendante* de la viscosité de la matrice vierge  $\beta^M$ .

L'approximation du potentiel obtenue par cette méthode entraîne donc un découplage des grandeurs. La viscosité  $\beta$  est influencée par la porosité de façon identique à celle d'un matériau de comportement linéaire ; la contrainte de seuil du matériau endommagé ne dépend que de la contrainte de seuil initiale.

La figure 7 présente l'influence de la fraction volumique sur les coefficients rhéologiques  $\sigma_0$  (7a) et  $\beta$  (7b). Les tendances sont comparables à celles observées pour un matériau pseudoplastique : le classement des modèles reste le même. Du modèle prévoyant le plus d'endommagement à celui en prévoyant le moins on trouve en effet : le modèle autocohérent à deux phases, la solution diluée, la méthode différentielle, la borne de HASHIN-SHTRIKMAN et la borne de VOIGT. D'autre part, la comparaison de ces deux figures montre que, quel que soit le modèle, la viscosité  $\beta$  s'endommage plus rapidement que la contrainte seuil  $\sigma_0$ .

#### IV.2.2. Analyse des équipotentiellles

L'influence de la vitesse de déformation, pour une porosité donnée, sur les équipotentiellles est semblable à celle observée pour un matériau pseudoplastique si l'on compare l'augmentation de  $\dot{\bar{E}}_{eq}$  avec l'augmentation de la sensibilité à la vitesse  $m$ . Ainsi, si  $\dot{\bar{E}}_{eq}$  est imposée son influence reste assez faible. En revanche si le chargement imposé est  $(\zeta^\infty, \dot{E}_{zz})$ , l'influence de la vitesse de déformation longitudinale croît avec la triaxialité lorsque le matériau est endommagé.

## V. Potentiel axisymétrique d'une matrice pseudoplastique endommagée

### V.1. Principe de la méthode

L'évolution de la forme des cavités rend le comportement global axisymétrique (chapitre III). L'approche de PONTE CASTAÑEDA permet d'appliquer les résultats du chapitre III pour estimer le potentiel d'un matériau endommagé par des cavités non sphériques.

Le potentiel de la matrice vierge est :

$$\psi^{(1)}(\sigma) = g(\bar{\sigma}_{vm}) = \frac{m}{(k_M)^{1/m} (m+1)} (\bar{\sigma}_{vm})^{\frac{m+1}{m}} \quad (35)$$

Considérons maintenant un matériau hétérogène linéaire de référence dont les phases ont la même distribution que le matériau endommagé étudié. Celui-ci est donc formé d'une matrice isotrope incompressible et de cavités ellipsoïdales de révolution ayant toutes la même orientation. Une estimation du potentiel macroscopique linéaire correspondant est (chapitre III) :

$$\Psi_{lin}(\Sigma) = \frac{1}{2} \left[ \frac{n(f, \lambda)}{k(f, \lambda)E(f, \lambda)} \Sigma_{xx}^2 - \frac{2l(f, \lambda)}{k(f, \lambda)E(f, \lambda)} \Sigma_{xx} \Sigma_{zz} + \frac{\Sigma_{zz}^2}{E(f, \lambda)} \right] \quad (45)$$

Le chargement imposé étant axisymétrique, seuls trois coefficients sont nécessaires pour caractériser le comportement. Les coefficients  $n(f, \lambda)$ ,  $k(f, \lambda)$ ,  $l(f, \lambda)$  et  $E(f, \lambda) = n(f, \lambda) - l(f, \lambda)^2 / k(f, \lambda)$  sont déterminés au moyen de la méthode différentielle (chapitre III) en fonction de la fraction volumique et de la forme des cavités, ainsi que de  $G_M$  (module de Young de la matrice vierge du matériau hétérogène linéaire de référence). Tous ces coefficients sont proportionnels à  $G_M$ . L'équation (22) donne :

$$\Psi(\Sigma) \geq (1-f) \sup_{G_M} \left\{ \frac{\frac{3G_M}{(1-f)k(f, \lambda)E(f, \lambda)} [n(f, \lambda) \Sigma_{xx}^2 - 2l(f, \lambda) \Sigma_{xx} \Sigma_{zz} + k(f, \lambda) \Sigma_{zz}^2]}{6G_M} - V^{(1)}(G_M) \right\} \quad (46)$$

La quantité  $s$  est donc déterminée. En prenant la transformée de Legendre, on obtient finalement une estimation du potentiel anisotrope non linéaire :

$$\Psi^{MD}(\Sigma) = (1-f)g(s) = \left( \frac{m}{m+1} \right) \left[ \frac{(1-f)^{\frac{m-1}{m+1}}}{(k_M)^{\frac{2}{m+1}}} \frac{3G_M^2}{k(f,\lambda)E(f,\lambda)} \left[ \frac{n(f,\lambda)}{G_M} \Sigma_{xx}^2 - 2 \frac{l(f,\lambda)}{G_M} \Sigma_{xx} \Sigma_{zz} + \frac{k(f,\lambda)}{G_M} \Sigma_{zz}^2 \right] \right]^{\frac{m+1}{2m}}$$

Bien que  $G_M$  semble apparaître dans la définition de  $s$ , les rapports  $G_M n(f,\lambda)/[k(f,\lambda)E(f,\lambda)]$ ,  $G_M l(f,\lambda)/[k(f,\lambda)E(f,\lambda)]$ ,  $G_M/E(f,\lambda)$  en sont bien sûr indépendants.

Par extension du comportement isotrope compressible, supposons maintenant que le comportement d'un matériau axisymétrique compressible pseudoplastique peut s'écrire sous la forme suivante (en utilisant les notations du chapitre III) pour un chargement axisymétrique imposé à l'infini :

$$\|\Sigma\|_{L^{-1}} = \|\dot{E}\|_L^m \quad (48)$$

avec 
$$\|\Sigma\|_{L^{-1}}^2 = \frac{n}{kE} \Sigma_{xx}^2 - 2 \frac{l}{kE} \Sigma_{xx} \Sigma_{zz} + \frac{1}{E} \Sigma_{zz}^2$$

$$\|\dot{E}\|_L^2 = k \dot{E}_{xx}^2 + 4l \dot{E}_{xx} \dot{E}_{zz} + n \dot{E}_{zz}^2$$

Le potentiel des contraintes correspondant s'écrit alors :

$$\Psi_{nl}(\Sigma) = \frac{m}{m+1} \|\Sigma\|_{L^{-1}}^{\frac{m+1}{m}} = \frac{m}{m+1} \left[ \frac{1}{kE} \left[ n \Sigma_{xx}^2 - 2l \Sigma_{xx} \Sigma_{zz} + k \Sigma_{zz}^2 \right] \right]^{\frac{m+1}{2m}} \quad (49)$$

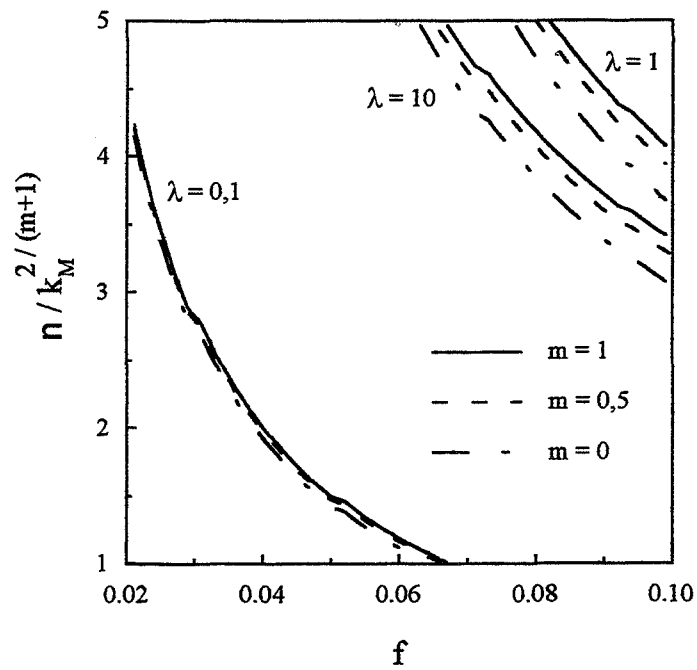
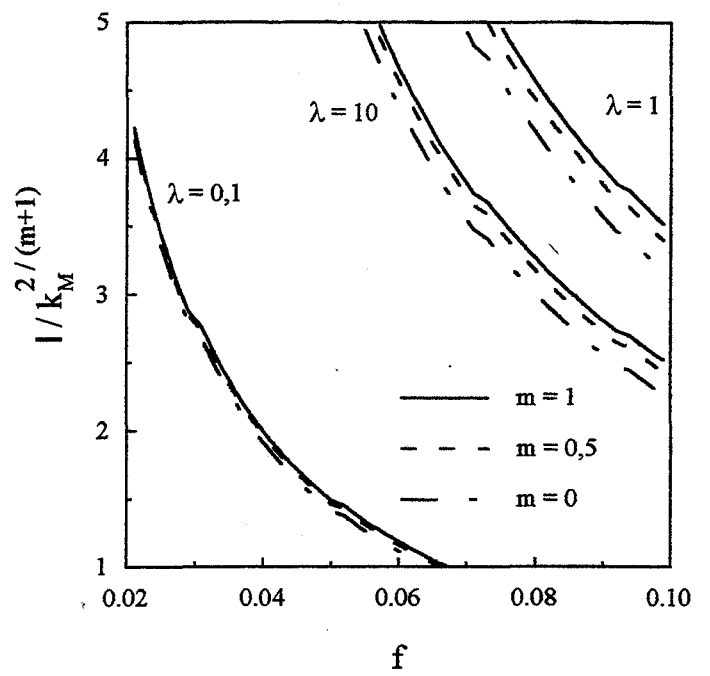
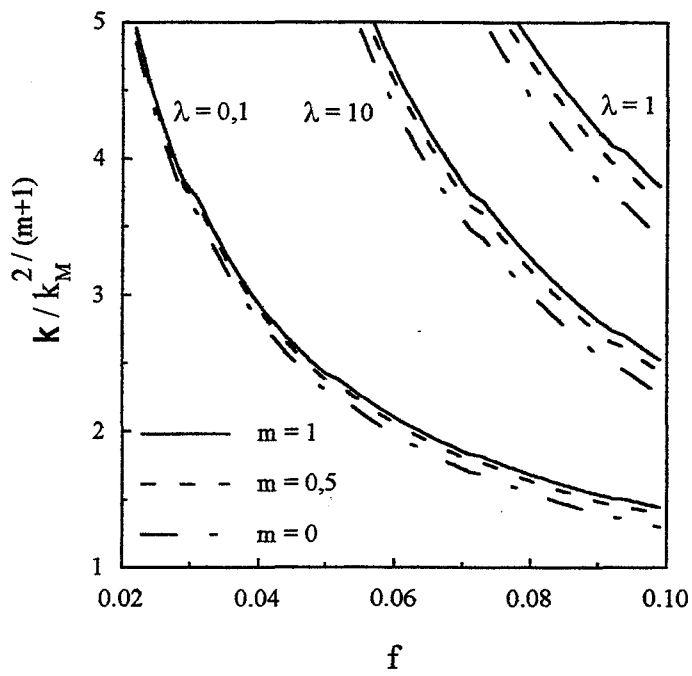
Il est utile ici de faire un point sur les unités des différentes grandeurs mises en jeu :

\*  $k_M$  est la viscosité de la *matrice isotrope incompressible pseudoplastique* de départ.  $k_M$  est donc homogène à  $[\sigma]^*[t]^m$ .

\*  $k(f,\lambda)$ ,  $l(f,\lambda)$ ,  $n(f,\lambda)$ ,  $E(f,\lambda)$  et  $G_M$  proviennent de l'analyse du *matériau axisymétrique linéaire* de référence. Elles sont homogènes à  $[\sigma]^*[t]$ .

\*  $k$ ,  $l$ ,  $n$ ,  $E$  caractérisent le *matériau axisymétrique pseudoplastique* dont le comportement est défini par (48). Elles sont homogènes à  $[\sigma]^{2/(m+1)}*[t]^{2m/(m+1)}$  ou encore à  $[k_M]^{2/(m+1)}$ .

L'identification des équations (47) et (49) permet maintenant d'obtenir une estimation des grandeurs  $k$ ,  $l$ ,  $n$ ,  $E=n-l^2/k$ . Il vient finalement :



**Figure 8 :** Influence de la porosité et du coefficient de sensibilité à la vitesse pour les trois paramètres du comportement axisymétrique pseudoplastique

$$k = C \frac{k(f, \lambda)}{3G_M} ; l = C \frac{l(f, \lambda)}{3G_M} ; n = C \frac{n(f, \lambda)}{3G_M} \quad (50)$$

avec 
$$C = (k_M)^{\frac{2}{m+1}} (1-f)^{\frac{1-m}{1+m}}$$

## V.2. Discussion des résultats

### V.2.1. Evolutions des paramètres rhéologiques

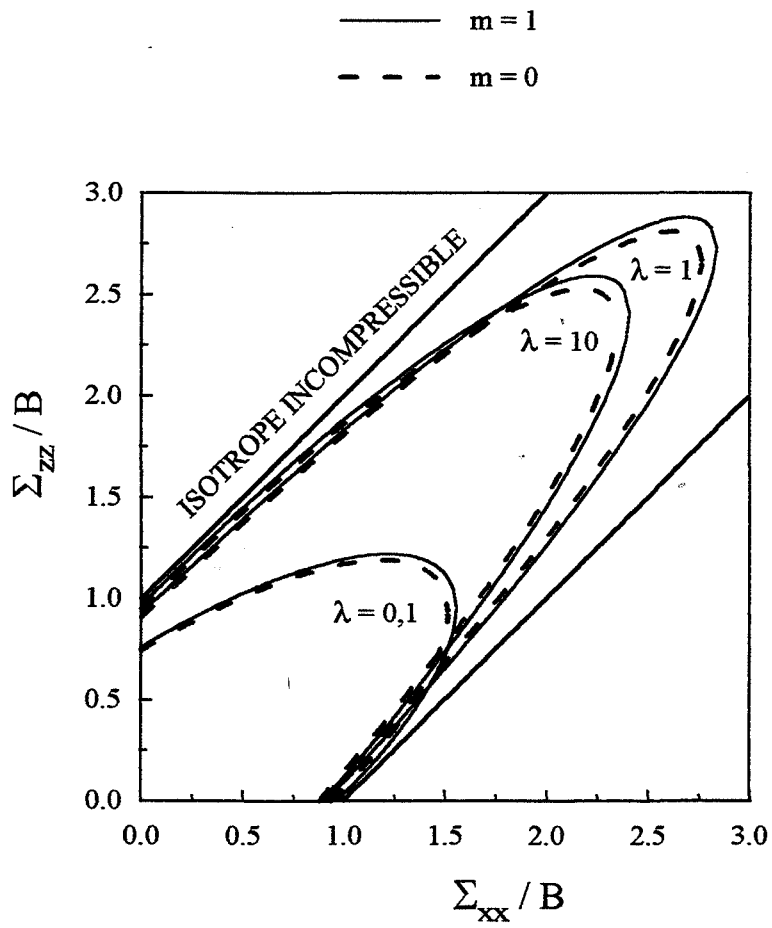
L'évolution des coefficients  $k$ ,  $l$ ,  $n$  en fonction de la fraction volumique de cavités est portée sur la figure 8. Ils sont normés par  $k_M^{2/(m+1)}$  afin de comparer des valeurs adimensionnelles. Les trois quantités sont les plus affectées pour des cavités aplaties et le moins pour des cavités sphériques. Lorsque  $\lambda$  est faible (cavités aplaties),  $k$  décroît moins rapidement que  $l$  et  $n$  avec la porosité. En revanche, pour  $\lambda$  grand (cavités allongées),  $n$  décroît plus lentement que  $l$  et  $k$ . L'équation (49) indique qu'une augmentation de  $k$  (resp.  $n$ ) donne une plus grande importance à la contrainte longitudinale  $\Sigma_{zz}$  (resp. déformation radiale  $\Sigma_{xx}$ ). Lorsque les cavités sont aplaties l'importance de  $\Sigma_{xx}$  sur l'endommagement diminue plus vite que celle de  $\Sigma_{zz}$ . Il apparaît d'autre part que l'influence de  $m$  est assez faible et atteint un maximum pour des cavités sphériques. La décroissance de  $m$  entraîne une diminution plus importante de ces trois grandeurs rhéologiques.

### V.2.2. Analyse des équipotentiels

La figure 9 présente la grandeur équivalente  $\|\Sigma\|_{L^{-1}}$  pour une norme des vitesses de déformation unitaire :  $\|\dot{\mathbf{E}}\|_L = 1$ . Afin d'obtenir des équipotentiels indépendantes de la viscosité de la matrice initiale, il est judicieux de normer les contraintes  $\Sigma_{xx}$  et  $\Sigma_{zz}$  par  $k_M^{1/(m+1)}$ . Cette normalisation permet de plus de retrouver exactement les courbes de la figure 13 du chapitre III lorsque le comportement est linéaire ( $m = 1$ ). Dans ce repère, le cylindre de von Mises de la matrice vierge initiale coupe les axes aux points de coordonnées (1,0) et (0,1).

L'influence de  $m$  s'avère faible pour une telle porosité ( $f = 0,05$ ). Cependant, la surface obtenue diminue avec  $m$ , ceci indique une augmentation de l'endommagement lorsque la sensibilité à la vitesse diminue. L'influence de





**Figure 9 :** Equipotentielle pour un comportement axisymétrique pseudoplastique calculé pour une vitesse de déformation unitaire ( $f = 0,05$ ).

$$\|\dot{\mathbf{E}}\|_{\mathbf{L}} = 1 \text{ et } B = (k_M)^{1/(m+1)}$$

la forme des cavités sur le sens de rotation des équipotentiellles n'est pas modifié par la non linéarité du comportement. Rappelons à nouveau que le fait d'avoir imposé  $\|\dot{\mathbf{E}}\|_L$  unitaire (et non pas  $\dot{E}_{zz}$ ) masque en grande partie l'influence de  $m$ .

## VI. Conclusion

Ce dernier chapitre a permis d'aborder l'étude du comportement macroscopique d'une matrice initialement incompressible, de comportement visqueux non linéaire, endommagée par la présence de cavités de forme identique et alignées suivant le même axe. Pour ce faire, les résultats de la méthode différentielle développée dans le chapitre III ont été étendus aux comportements non linéaires à l'aide du principe variationnel proposé par PONTE CASTAÑEDA [1991]. Pour un comportement isotrope, les estimations du potentiel obtenues se trouvent en dessous de l'extension de la borne de HASHIN-SHTRIKMAN au comportement non linéaire.

Ceci a permis de déterminer les constantes rhéologiques des comportements pseudoplastique endommagé ( $\bar{\Sigma}_{\dot{\epsilon}_{eq}} = k \bar{E}_{\dot{\epsilon}_{eq}}^m$ ) et linéaire avec seuil endommagés ( $\bar{\Sigma}_{\dot{\epsilon}_{eq}} = \sigma_0 + \beta \bar{E}_{\dot{\epsilon}_{eq}}$ ) proposés dans le chapitre II. Les résultats montrent que la grandeur  $y$ , caractéristique de la compressibilité de la matrice, est indépendante du coefficient de sensibilité à la vitesse  $m$  ainsi que du comportement étudié. D'autre part, l'étude spécifique du comportement linéaire avec seuil montre que la viscosité  $\beta$  décroît plus rapidement lorsque la porosité augmente que la contrainte de seuil  $\sigma_0$ . Pour une telle loi de comportement, le modèle utilisé met en évidence un découplage de l'influence de l'endommagement sur la viscosité et sur la contrainte de seuil :  $\beta$  est indépendant du seuil de la matrice vierge ( $\beta$  s'endommage de façon identique à la viscosité d'un matériau linéaire) alors que  $\sigma_0$  est indépendant de la viscosité de la matrice vierge.

Quel que soit le comportement, il apparaît que l'influence de  $m$  est beaucoup plus importante lorsque la vitesse imposée est  $\dot{E}_{zz}$  (au lieu de  $\bar{E}_{\dot{\epsilon}_{eq}}$ ). Dans ces conditions, une inversion de tendance est à nouveau observée en fonction de la triaxialité : à triaxialité élevée (chocs de plaques) une diminution de  $m$  augmente fortement l'endommagement ; en revanche, à faible triaxialité (traction uniaxiale) une diminution de  $m$  ralentit, dans des proportions moins importantes, l'endommagement. Cette observation s'applique aussi au comportement linéaire avec seuil, une augmentation de la vitesse de déformation imposée entraînant alors une augmentation de la sensibilité à la vitesse.

Le principe variationnel proposé par PONTE CASTAÑEDA [1991] a dans un deuxième temps été appliqué afin d'étudier l'influence de l'anisotropie d'origine morphologique sur le comportement initialement pseudoplastique incompressible de la matrice vierge. De même que dans le chapitre III, il apparaît que les cavités les plus nocives sont de forme aplatie. La diminution de la sensibilité à la vitesse entraîne une augmentation de l'endommagement (pour  $\|\dot{\mathbf{E}}\|_L$  imposée unitaire). Afin de mieux valider ce modèle, il serait possible de le comparer aux bornes obtenues en étendant au cas pseudoplastique celles qui ont été proposées par WENG [1992] pour un comportement axisymétrique linéaire.



## **CONCLUSION GENERALE**



## Conclusion générale

L'objectif de ce travail était de mieux comprendre la phase de croissance de l'endommagement lors de la déformation des matériaux ductiles. Les résultats observés au cours d'expériences diverses ont mis en évidence la présence de cavités dans les métaux déformés. Celles-ci rendent le matériau compressible. L'évolution de la forme des cavités au cours du chargement peut aussi donner naissance à une anisotropie d'origine morphologique. De nombreux travaux antérieurs, théorique et expérimentaux, ont montré d'autre part qu'une augmentation de la sensibilité à la vitesse du comportement global entraîne une meilleure stabilité de l'élongation. Dans ce contexte, nous avons étudié les influences réciproques entre l'endommagement global (*changement de comportement effectif*) et local (*croissance des cavités*).

Plusieurs hypothèses ont été posées afin de pouvoir modéliser le problème étudié. En premier lieu, la matrice vierge est supposée viscoplastique isotrope et incompressible. L'élasticité de ce matériau est ainsi négligée devant la grandeur des déformations mises en jeu lors de la mise en forme. Les comportements étudiés obéissent à des lois empiriques mais fréquemment observées : une loi pseudoplastique aux faibles vitesses de déformation, une loi linéaire avec seuil aux grandes vitesses de déformation. D'autre part, les cavités sont toutes supposées ellipsoïdale de révolution de même rapport de forme et alignées suivant le même axe (leur taille respective n'est pas un paramètre dans ce modèle, seule la fraction volumique intervient). Les interactions entre les cavités ne sont prises en compte qu'à l'aide du champ moyen dans la matrice. En conséquence, les paramètres prépondérants du modèle sont le comportement de la matrice vierge, la forme et la fraction volumique initiale de cavités et le type de chargement imposé.

### Influence du comportement global sur l'endommagement local

Afin d'étudier l'influence du comportement global sur la croissance des cavités, de nouvelles normes des tenseurs des contraintes et des vitesses de déformation ont été introduites. Elles prennent en compte, dans le cas isotrope, les traces des tenseurs des contraintes et des vitesses de déformation, mais négligent l'influence du troisième invariant. Le champ de vitesse exact autour



d'une cavité dans une matrice isotrope viscoplastique linéaire compressible a été calculé à l'aide de la méthode des trois potentiels. Les modes de perturbation obtenus ont permis d'appliquer un principe variationnel (BUDIANSKY et al. [1982]) au problème de localisation dans une matrice viscoplastique non linéaire isotrope compressible.

L'étude de l'évolution de l'endommagement local en fonction du comportement global de la matrice a révélé les points suivants :

*Les choix des paramètres du chargement ainsi que de la déformation de référence* sont déterminants pour l'analyse de l'influence de la compressibilité sur la croissance des cavités. En effet, si la déformation équivalente de von Mises sert de mesure, la compressibilité de la matrice accélère toujours la croissance volumique de la cavité. En revanche, si la déformation axiale ou la déformation équivalente quadratique  $\bar{\epsilon}_{eq}(\dot{\epsilon}_{vm}, \dot{\epsilon}_{kk})$  sont choisies comme référence, la compressibilité est stabilisante à haute triaxialité et endommageante à faible triaxialité.

*La sensibilité à la vitesse de déformation de la matrice* joue un rôle stabilisant sur l'endommagement local. Lorsque la sensibilité à la vitesse augmente, la croissance des cavités est ralentie. Ceci a pour conséquence un effet stabilisant du changement de loi de comportement, lorsque la vitesse de déformation augmente et dépasse la vitesse de transition entre les domaines de vitesse de déformation quasistatique et dynamique.

*Le rôle de la triaxialité des contraintes* dépend de la forme des cavités. A haute triaxialité, le volume d'une cavité allongée augmente plus rapidement que celui d'une cavité d'excentricité plus faible. Inversement à faible triaxialité, les cavités allongées sont celles dont le volume augmente le moins rapidement.

*La compressibilité de la matrice* diminue l'effet de la non linéarité. De plus, dans une matrice globalement isotrope, la compressibilité de la matrice n'a pas d'influence sur la forme finale des cavités. Celle-ci ne dépend que de la triaxialité des contraintes imposées. En revanche, si la matrice est anisotrope, l'excentricité asymptotique  $e_a$  dépend à la fois de la triaxialité des contraintes et du comportement.

## Influence de l'endommagement local sur le comportement global

La détermination du comportement global d'un matériau linéaire endommagé par des cavités de forme  $\lambda$  et de fraction volumique  $f$  a été effectuée par la méthode différentielle. L'introduction de nouvelles normes des tenseurs des contraintes et des vitesses de déformation pour le comportement axisymétrique, ainsi que l'application d'un principe variationnel (PONTE CASTAÑEDA [1991]) ont permis d'estimer le comportement axisymétrique d'une matrice non linéaire endommagée. L'étude du comportement global du matériau en fonction de l'endommagement local a révélé les points suivants :

*Une augmentation de la fraction volumique de cavités conduit évidemment à une diminution des modules. Celle-ci peut être importante même pour de faibles fractions volumiques. Ainsi, pour une fraction volumique  $f=0,05$  le module de Young longitudinal  $E_3$  chute de 5 % pour des cavités allongées ( $\lambda = 10$ ) mais de plus de 40% pour des cavités aplaties ( $\lambda = 0,1$ ).*

*La forme des cavités détermine l'anisotropie d'origine morphologique du comportement global. L'observation des équipotentiels a montré le rôle très endommageant des cavités aplaties. Les cavités sphériques apparaissent être les moins nocives. De plus, lorsque les cavités sont assez éloignées de la forme sphérique ( $\lambda < 0,2$  ou  $\lambda > 5$ ), l'anisotropie induite par leur présence devient importante même aux faibles fractions volumiques considérées ( $f < 0,05$ ). Cette anisotropie entraîne une rotation des équipotentiels telle que la contrainte imposée perpendiculairement à la plus grande surface des cavités prend plus d'importance vis-à-vis de l'endommagement.*

*La détermination du comportement d'une matrice linéaire avec seuil endommagée fait apparaître un découplage entre la contrainte seuil  $\sigma_0$  et la viscosité  $\beta$ .*

## Evolution de l'endommagement en fonction de la déformation axiale $E_{zz}$

L'ensemble de ces résultats a finalement permis d'étudier l'évolution *couplée* de l'endommagement *local* et *global* d'une matrice viscoplastique linéaire contenant une fraction volumique initiale  $f_0$  de cavités de forme  $\lambda_0$ . Il a tout d'abord été vérifié numériquement qu'aux fractions volumiques nous concernant, la méthode d'homogénéisation utilisée restitue bien le fait que la croissance volumique totale résulte uniquement de la présence des cavités. Les

résultats ont alors mis en évidence la grande importance de la fraction volumique et de la forme initiales des cavités sur la croissance de l'endommagement. Une bonne connaissance de la phase de germination des cavités est donc nécessaire lors de l'étude de l'endommagement. D'autre part, l'étude, sous une triaxialité élevée, de la contrainte macroscopique axiale  $\Sigma_{zz}$  en fonction de la déformation axiale  $E_{zz}$  a montré que pour des cavités allongées ( $\lambda_0$  grand)  $\Sigma_{zz}$  est, initialement plus élevée que pour des cavités aplaties ( $\lambda_0$  faible). Cependant,  $\Sigma_{zz}$  diminue plus vite au cours du chargement car le volume des cavités allongées augmente plus rapidement (ainsi donc que la porosité).

#### *\* Perspectives*

Le calcul de localisation dans une matrice non linéaire a été effectué pour un nombre peu élevé de modes de perturbation. Il serait possible d'améliorer cette analyse en prenant des champs de vitesse plus complets comme l'a fait HUANG [1991] dans le cas d'une matrice incompressible. En ayant soin de s'assurer que la croissance volumique macroscopique n'est due qu'à la présence des cavités, l'évolution de l'endommagement dans une matrice non linéaire peut être effectuée en combinant les résultats des chapitres II et IV. D'autre part, l'écrouissage de la matrice n'a pas été considéré, mais il peut (bien que numériquement) être ajouté au modèle.

Pour un comportement linéaire, seul le chargement axisymétrique a été pris en compte. Cependant, il serait possible d'étudier l'influence d'un cisaillement sur l'évolution de l'endommagement en tenant compte alors de la rotation des ellipsoïdes.

Finalement, toute validation de la loi de comportement doit passer par une bonne connaissance de la phase de germination afin de déterminer les fractions volumiques et excentricités initiales des cavités et par une meilleure connaissance des interactions directes entre cavités afin d'estimer les paramètres caractéristiques de la rupture (fraction volumique et excentricités à rupture, etc.). Alors seulement, des critères de rupture définis à l'échelle des cavités pourront être mieux formulés.

## **BIBLIOGRAPHIE**



## BIBLIOGRAPHIE

- BAO G., HUTCHINSON J.W., McMEEKING R.M., Mech. Mater. 12 [1991] 85
- BERG C.A., Proc. US Nat. 4<sup>th</sup> Congress Appl. Mech. Ed. R.M. Rosenberg ASME, Berkeley, [1962] 885
- BOUCHER S., Journal of Composite Materials 8 [1974] 82
- BOUSSINESQ M.J., "Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques" Gauthier-Villars [1885]
- BRIOTTET L., KLÖCKER H., MONTHEILLET F., "Fourth International Symposium on Plasticity and Its Current Applications" Baltimore, Maryland, July [1993]
- BRUGGEMAN D.A.G., Annalen der Physik 24 [1935] 636
- BUDIANSKY B., HUTCHINSON J.W., SLUTSKY S., "Mechanics of Solids" The R. Hill 60th anniversary volume, Ed. Hopkins H.G., Sewell M.J. [1982] 13
- CHIEM C.Y., DUFFY J., Mat. Sci. Eng. 57 [1983] 233
- CHRISTENSEN R.M., LO K.H., J. Mech. Phys. Solids 27 [1979] 315
- CHRISTENSEN R.M., LO K.H., J. Mech. Phys. Solids 34 [1986] 639 (erratum)
- COX T.B., LOW J.R., Met. Trans. 5 [1974] 1457
- DENDIEVEL R., "Méthodes variationnelles et approximations autocohérentes en élasticité et viscoplasticité" Thèse, Grenoble [1992]
- DUMONT C., "Endommagement de métaux à matrice ductile en traction quasistatique et dynamique" Thèse, Paris [1991]
- DUVA J.M., HUTCHINSON J.W., Mech. Mater. 3 [1984] 41
- EDWARDS R.H., J. Appl. Mech. 18 [1951] 1
- ESHELBY J.D., Proc. R. Soc. Lond. A241 [1957] 376
- ESHELBY J.D., Proc. R. Soc. Lond. A252 [1959] 561
- FRANCFORT G.A., MURAT F., Arch. Ration. Mech. Anal. 94 [1986] 307
- FRANÇOIS D., PINEAU A., ZAOUI A., "Comportement mécanique des matériaux I" Hermès, Paris [1991]
- GIANNOTTA J.C., "Comportement mécanique et évolution structurale de cuivres de haute pureté dans le domaine dynamique" Thèse, Paris [1986]
- GILORMINI P., Rapport interne LMT (Cachan) n°132 Juillet [1992]
- GILORMINI P., LICHT C., SUQUET P., Arch. Mech. 40 [1988] 43

- GOLOGANU M., LEBLOND J.B., DEVAUX J., J. Mech. Phys. Solids 41 [1993] 1723
- GOODIER J.N., J. Appl. Mech. 55 [1933] 39
- GURLAND J., PLATEAU J., Trans. Am. Soc. Metals 56 [1963] 442
- GURSON A.L., J. Engng. Mater. Tech. 99 [1977] 2
- HART E.W., Acta Met. 15 [1967] 351
- HASHIN Z., J. Mech. Phys. Solids 13 [1965] 119
- HASHIN Z., Journal of Appl. Mech. 50 Sept [1983] 481
- HASHIN Z., SHTRIKMAN S., J. Mech. Phys. Solids 11 [1963] 127
- HILL R., J. Mech. Phys. Solids 5 [1956] 66
- HILL R., J. Mech. Phys. Solids 12 [1964] 199
- HILL R., J. Mech. Phys. Solids 13 [1965 a] 89
- HILL R., J. Mech. Phys. Solids 13 [1965 b] 189
- HILL R., J. Mech. Phys. Solids 13 [1965 c] 213
- HUANG Y., Trans. ASME 58 December [1991] 1084
- HUANG Y., HUTCHINSON J.W., TVERGAARD V., J. Mech. Phys. Solids 39 [1991] 223
- KLÖCKER H., "Analyse théorique de la croissance d'une cavité dans un matériau viscoplastique" Thèse, Saint-Etienne [1991]
- KLÖCKER H., MONTHEILLET F., C. R. Acad. Sci. 314 série II [1992] 419
- KRÖNER E., J. Mech. Phys. Solids 25 [1977] 137
- LAWS N., Int. J. Engng. Science 12 [1974] 79
- LEBLOND J.B., PERRIN G., "6<sup>th</sup> conf. on continuum models and discrete systems" Dijon [1989]
- LEE B.J., MEAR M.E., J. Mech. Phys. Solids 39 [1991] 627
- LEE B.J., MEAR M.E., J. Mech. Phys. Solids 40 [1992] 1805
- MALCORN M.H., Revue de Métallurgie 8 Aout [1945] 241
- MARIGO J.J., MIALON P., MICHEL J.C., SUQUET P., J. Mécanique Théorique et Appliquée 6 [1987] 47
- MASON W.P., J. Acoust. Soc. Am. 32 [1960] 48
- MCCINTOCK F.A., J. Appl. Mech. ASME 35 [1968] 363
- MCLAUGHLIN R., Int. J. of Engng. Science 15 [1977] 237

- MICHEL J.C., SUQUET P., J. Mech. Phys. Solids 40 [1992] 783
- MILTON G.W., PHAN-THIEN N., Proc. R. Soc. Lond. A380 [1982] 305
- MONTHEILLET F., GILORMINI P., "Fourth International Symposium on Plasticity and Its Current Applications" Baltimore, Maryland, July [1993]
- MONTHEILLET F., MOUSSY F., "Physique et mécanique de l'endommagement" Les éditions de physiques [1986]
- MORI T., TANAKA K., Acta Metall. 21 [1973] 571
- MURA T., "Micromechanics of defects in solids" Martinus Nijhoff Publisher [1987]
- NAGAKI S., SOWERBY R., GOYAL M., Mat. Sci. Eng. A142 [1991] 163
- NEMAT-NASSER S., HORI M., "Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials" North Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, 37 Elsevier Science Publisher [1993]
- PAPCOVICH P.F., C. R. Acad. Sci. 195 [1932] 513
- PONTE CASTAÑEDA P., J. Mech. Phys. Solids 39 [1991] 45
- PONTE CASTAÑEDA P., J. Mech. Phys. Solids 40 [1992] 1757
- PONTE CASTAÑEDA P., ZAIDMAN M., J. Mech. Phys. Solids [1994] (à publier)
- PUGH H.L., GREEN D., Proc. Inst. Mech. Eng. 179 [1964] 415
- QIU Y.P., WENG G.J., Int. J. of Engng. Science 28 [1990] 1121
- QIU Y.P., WENG G.J., Int. J. of Plasticity 9 [1993] 271
- REGAZZONI G., "Comportement et ductilité du cuivre et du tantale purs dans le domaine de vitesses de déformation  $10^{-4}$  -  $3 \cdot 10^{-3}$  s<sup>-1</sup>" Thèse, Grenoble [1983]
- REGAZZONI G., MONTHEILLET F., J. Phys. Colloque C5 8 [1985] 435
- RICE J.R., TRACEY D.M., J. Mech. Phys. Solids 17 [1969] 201
- SADOWSKY M.A., STERNBERG E., J. Appl. Mech. A69 [1947] 191
- SHIMA S., OYANE M., Int. J. Mechanical Science 18 [1976] 285
- STOLZ C., ZAOUA A., Publication du LMA n°124 Marseille [1991] 191
- SUQUET P., J. Mech. Phys. Solids 41 [1993] 981
- TALBOT D.R.S., WILLIS J.R., IMA J. Appl. Math. 35 [1985] 39
- TVERGAARD V., Int. J. Fract. 17 [1981] 389
- VERNUSSE P., "Comportement mécanique d'un matériau microhétérogène. Application à la déformation à chaud d'aciers à deux phases ductiles." Thèse, Saint-Etienne [1993]



**WALPOLE L.J.**, J. Mech. Phys. Solids **14** [1966] 151

**WALPOLE L.J.**, J. Mech. Phys. Solids **17** [1969] 235

**WENG G.J.**, Int. J. Engng. Science **30** [1992] 83

**WILLIS J.R.**, J. Mech. Phys. Solids **25** [1977] 185

**WILLIS J.R.**, IMA J. Appl. Math. **43** [1989] 231

**ZIMMERMAN R.W.**, Mech. of Materials **12** [1991] 17

**ZUKAS J.A., NICHOLAS T., SWIFT H.F., GRESZZUK L.B., CURRAN D.R.**, "Impact Dynamics" John Wiley & Sons [1982]

## **ANNEXES**



## ANNEXE I

**Champs de contrainte et de vitesse de déformation autour d'une cavité  
ellipsoïdale de révolution dans une matrice viscoplastique linéaire :  
solution exacte**

**Notations :**

L'indice 0 indique une valeur calculée à la surface de la cavité. Les notations suivantes sont utilisées dans cette annexe :

$$\text{sgn}(e) = \begin{cases} +1 & \text{si } e > 0 \\ -1 & \text{si } e < 0 \end{cases}$$

$$\chi = \text{sgn}(S - T) = \begin{cases} +1 & \text{si } S > T \Leftrightarrow \dot{\epsilon}_{zz}^{\infty} > \dot{\epsilon}_{xx}^{\infty} \\ -1 & \text{si } S < T \Leftrightarrow \dot{\epsilon}_{zz}^{\infty} < \dot{\epsilon}_{xx}^{\infty} \end{cases}$$

$$q = \frac{R}{r} + e \frac{r}{R} ; \quad \bar{q} = \frac{R}{r} - e \frac{r}{R}$$

$$q_0 = 1 + e ; \quad \bar{q}_0 = 1 - e$$

$$s = \frac{q}{2\sqrt{|e|}} ; \quad \bar{s} = \frac{\bar{q}}{2\sqrt{|e|}}$$

$$s_0 = \frac{q_0}{2\sqrt{|e|}} ; \quad \bar{s}_0 = \frac{\bar{q}_0}{2\sqrt{|e|}}$$

$$t = \sin \theta ; \quad \bar{t} = \cos \theta$$

$$A^2 = 4e(\text{sgn}(e)s^2 - t^2)$$

$$Q(s) = -Q_1(s) :$$

$$\begin{cases} Q = 1 - \frac{s}{2} \ln \left( \frac{s+1}{s-1} \right) & \text{si } e > 0 \\ Q = 1 - s \tan^{-1} \left( \frac{1}{s} \right) & \text{si } e < 0 \end{cases}$$

$$Q_R = Q(s_0)$$

## I.1 Champs à l'infini

Champ de vitesses :

$$u_s^\infty = \text{sgn}(e) \frac{2eR s \bar{s}}{A} \dot{\bar{\epsilon}}_{vm}^\infty \left[ \chi (3t^2 - 1) + \frac{3(1-2\nu)}{(1+\nu)} \zeta^\infty \right]$$

$$u_t^\infty = \frac{2eR t \bar{t}}{A} \dot{\bar{\epsilon}}_{vm}^\infty \left[ \chi (3 \text{sgn}(e) s^2 - 1) + \frac{3(1-2\nu)}{(1+\nu)} \zeta^\infty \right]$$

Champ de contraintes :

$$\sigma_{ss}^\infty = \frac{4e\bar{\sigma}_{vm}^\infty}{A^2} \left[ \frac{\chi}{3} (\text{sgn}(e) s^2 (3t^2 - 1) - 2t^2) + \zeta^\infty (\text{sgn}(e) s^2 - t^2) \right]$$

$$\sigma_{tt}^\infty = \frac{4e\bar{\sigma}_{vm}^\infty}{A^2} \left[ \frac{\chi}{3} (\text{sgn}(e) s^2 (2 - 3t^2) + t^2) + \zeta^\infty (\text{sgn}(e) s^2 - t^2) \right]$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^\infty = \bar{\sigma}_{vm}^\infty \left( \zeta^\infty - \frac{\chi}{3} \right)$$

$$\sigma_{st}^\infty = \chi \text{sgn}(e) \frac{4e s \bar{s} t \bar{t}}{A^2} \bar{\sigma}_{vm}^\infty$$

## I.2 Premier mode de perturbation

Champ de vitesses :

$$g_s^1 = -\frac{1}{2G} \frac{1}{R A \bar{s}}$$

$$g_t^1 = 0$$

Champ de vitesses de déformation :

$$\eta_{ss}^1 = \frac{s}{2G R^2 A^2} \left[ \frac{1}{\bar{s}^2} + \text{sgn}(e) \frac{4e}{A^2} \right]$$

$$\eta_{tt}^1 = -\text{sgn}(e) \frac{1}{2G} \frac{4e s}{R^2 A^4}$$

$$\eta_{\varphi\varphi}^1 = -(\eta_{ss}^1 + \eta_{tt}^1)$$

$$\eta_{st}^1 = -\frac{1}{2G} \frac{4e t \bar{t}}{\bar{s} R^2 A^4}$$

Champ de contraintes :

$$\sigma_{ij}^1 = 2G \eta_{ij}^1$$

### I.3 Deuxième mode de perturbation

Champ de vitesses :

$$g_s^2 = -\frac{1}{2G} \frac{\bar{s}(3t^2-1)}{2RA} \left( \text{sgn}(e)3Q + \frac{1}{\bar{s}^2} \right)$$

$$g_t^2 = \frac{1}{2G} \frac{3t\bar{t} \left[ (1-\text{sgn}(e)3s^2)Q - 1 \right]}{2RA s}$$

Champ de vitesses de déformation :

$$\eta_{ss}^2 = \frac{1}{2GR^2} \left[ -\frac{3}{8es} \left( \frac{2\text{sgn}(e)-s^2}{\bar{s}^2} + (2-3\text{sgn}(e)s^2)Q \right) - \frac{3s}{2A^2} \left( \frac{3\text{sgn}(e)s^2-5}{3\bar{s}^2} + 3\bar{s}^2 Q \right) + \text{sgn}(e) \frac{4es}{A^4} \right]$$

$$\eta_{tt}^2 = \frac{1}{2GR^2} \left[ -\frac{3}{8es} \left( 1 + (3\text{sgn}(e)s^2-1)Q \right) + \frac{3s}{2A^2} \left( \text{sgn}(e) + 3\bar{s}^2 Q \right) - \text{sgn}(e) \frac{4es}{A^4} \right]$$

$$\eta_{\varphi\varphi}^2 = -(\eta_{ss}^2 + \eta_{tt}^2)$$

$$\eta_{st}^2 = -\frac{t\bar{t}}{2GR^2 A^2 \bar{s}} \left[ \frac{3(1+3\text{sgn}(e)\bar{s}^2 Q)}{2} + \frac{4e}{A^2} \right]$$

Champ de contraintes :

$$\sigma_{ij}^2 = 2G \eta_{ij}^2$$

### I.4 Troisième mode de perturbation

Champ de vitesses :

$$g_s^3 = \frac{1}{2G} \left[ \text{sgn}(e) \frac{2\sqrt{|e|} t^2}{\bar{s} A} - (1-2\nu) \left( \frac{4\sqrt{|e|} t^2 \bar{s} Q}{A} \right) \right]$$

$$g_t^3 = -\frac{1}{2G} (1-2\nu) \frac{4\sqrt{|e|} t \bar{t} s}{A} Q$$

Champ de vitesses de déformation :

$$\eta_{ss}^3 = \frac{2\sqrt{|e|} t^2}{2G R A^2} \left[ -s \left( \text{sgn}(e) \frac{1}{\bar{s}^2} + \frac{4e}{A^2} \right) - \frac{2(1-2\nu)}{s} (\text{sgn}(e) + \bar{s}^2 Q) \right]$$

$$\eta_{tt}^3 = \frac{4\sqrt{|e|} s}{2G R A^2} \left[ \frac{2e t^2}{A^2} - (1-2\nu) \bar{t}^2 Q \right]$$

$$\eta_{\varphi\varphi}^3 = \text{sgn}(e) \frac{1}{2G} \frac{2\sqrt{|e|} s t^2}{R A^2 \bar{s}^2}$$

$$\eta_{st}^3 = \frac{2\sqrt{|e|} t \bar{t}}{2G R A^2} \left[ \frac{4e s^2}{A^2 \bar{s}} - (1-2\nu) \left( \text{sgn}(e) \frac{1}{\bar{s}} + 2\bar{s} Q \right) \right]$$

Champ de contraintes :

$$\sigma_{ij}^3 = 2G \left( \eta_{ij}^3 + \frac{\nu}{1-2\nu} \eta_{kk}^3 \delta_{ij} \right)$$



## I.5 Amplitudes

**I.5.1 :**  $\sigma_{xx}^{\infty} = \sigma_{yy}^{\infty} = 1; \sigma_{zz}^{\infty} = 0$

$$\alpha_1^T = \frac{\text{sgn}(e) 4 e R^2 s_0 \bar{s}_0^2 \left[ -2 v + 3 + \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2 + \text{sgn}(e) Q_R \bar{s}_0^2 (-2 v + 5 + 3 \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2) \right]}{3 \left[ v - 1 - \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2 + \text{sgn}(e) Q_R \bar{s}_0^2 (2(v-1) - 3 \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2) + Q_R^2 \bar{s}_0^4 (v+1) \right]}$$

$$\alpha_2^T = \frac{\text{sgn}(e) 8 e R^2 s_0 \bar{s}_0^2 \left[ v + \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2 + \text{sgn}(e) Q_R \bar{s}_0^2 (v-1) \right]}{3 \left[ v - 1 - \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2 + \text{sgn}(e) Q_R \bar{s}_0^2 (2(v-1) - 3 \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2) + Q_R^2 \bar{s}_0^4 (v+1) \right]}$$

$$\alpha_3^T = \frac{\text{sgn}(e) 2 \sqrt{|e|} R s_0 \bar{s}_0^2 \left[ 1 + \text{sgn}(e) Q_R \bar{s}_0^2 \right]}{\left[ v - 1 - \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2 + \text{sgn}(e) Q_R \bar{s}_0^2 (2(v-1) - 3 \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2) + Q_R^2 \bar{s}_0^4 (v+1) \right]}$$

**I.5.2 :**  $\sigma_{xx}^{\infty} = \sigma_{yy}^{\infty} = 0; \sigma_{zz}^{\infty} = 1$

$$\alpha_1^S = -\frac{\text{sgn}(e) 2 e R^2 s_0 \bar{s}_0^2 \left[ 1 - \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2 + Q_R \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2 (4 v - 3(1 + \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2)) \right]}{3 \left[ v - 1 - \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2 + \text{sgn}(e) Q_R \bar{s}_0^2 (2(v-1) - 3 \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2) + Q_R^2 \bar{s}_0^4 (v+1) \right]}$$

$$\alpha_2^S = \frac{\text{sgn}(e) 4 e R^2 s_0 \bar{s}_0^2 \left[ -1 - 2 \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2 + 2 v \text{sgn}(e) Q_R \bar{s}_0^2 \right]}{3 \left[ v - 1 - \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2 + \text{sgn}(e) Q_R \bar{s}_0^2 (2(v-1) - 3 \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2) + Q_R^2 \bar{s}_0^4 (v+1) \right]}$$

$$\alpha_3^S = \frac{\text{sgn}(e) \sqrt{|e|} R s_0 \bar{s}_0^2 \left[ \text{sgn}(e) Q_R \bar{s}_0^2 - 1 \right]}{\left[ v - 1 - \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2 + \text{sgn}(e) Q_R \bar{s}_0^2 (2(v-1) - 3 \text{sgn}(e) \bar{s}_0^2) + Q_R^2 \bar{s}_0^4 (v+1) \right]}$$





## ANNEXE II

## Polynômes et fonctions de Legendre associées

*\* Polynômes de Legendre*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{(3x^2 - 1)}{2}$$

*\* Fonctions de Legendre associées*

$$Q_n(x) = P_n(x) \int_{\infty}^x \frac{du}{(1-u^2)[P_n(u)]^2}$$

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

$$Q_1(x) = -1 + \frac{x}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

$$Q_2(x) = \frac{(3x^2 + 1)Q_1(x) - 1}{2x}$$



## ANNEXE III

## Détermination de la vitesse de déformation de transition

## quasistatique - dynamique pour le Cuivre CuCl

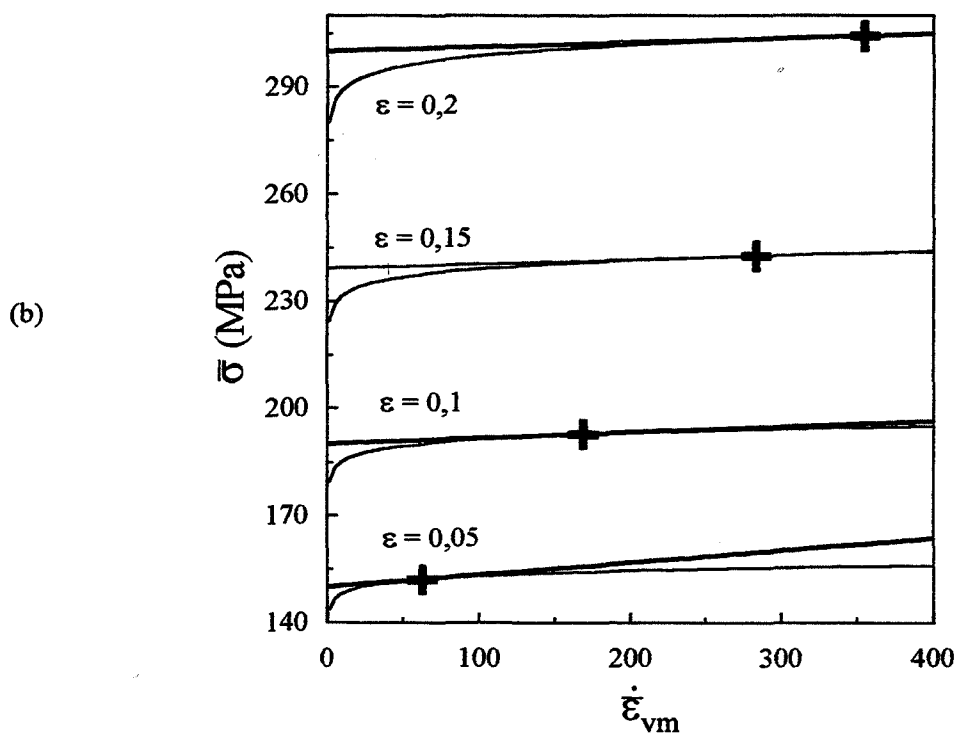
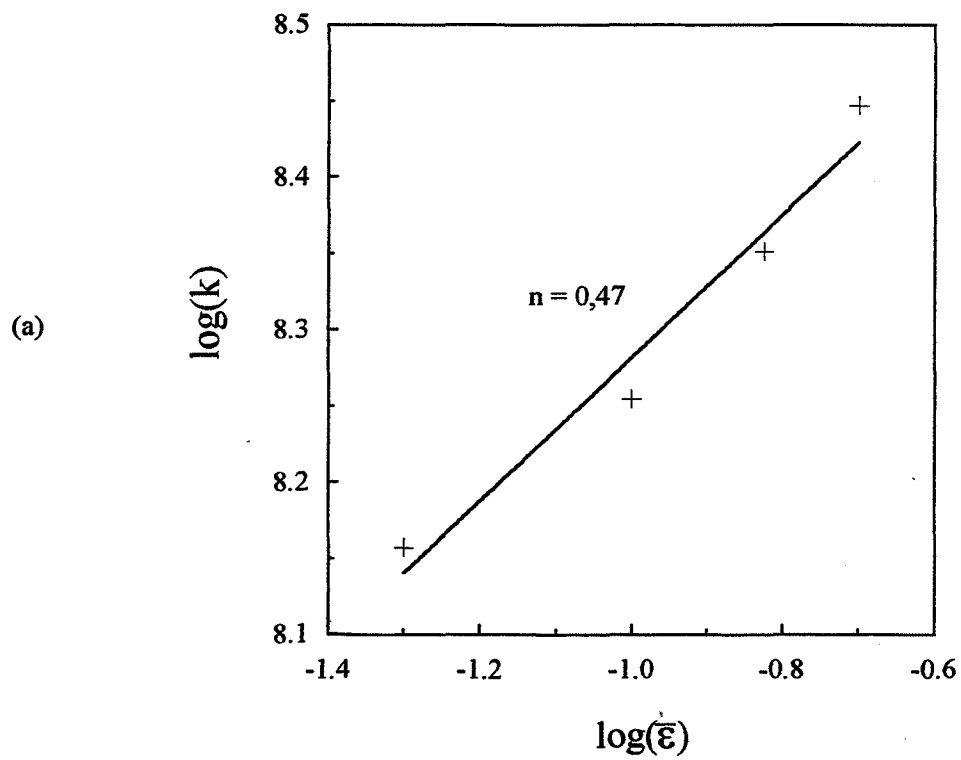
L'étude expérimentale du comportement du cuivre CuCl met en évidence deux lois de comportement liées aux domaines quasistatique et dynamique. A l'aide des valeurs proposées dans la littérature (REGAZZONI [1983], GIANNOTTA [1986]), nous avons déterminé la vitesse de déformation de transition entre ces deux domaines. Cette vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}_T$  correspond au point de tangence des deux comportements incompressibles proposés :

$$\bar{\sigma}_{vm} = k \dot{\epsilon}_{vm}^m \text{ et } \bar{\sigma}_{vm} = \sigma_0 + \beta \dot{\epsilon}_{vm} \quad (1)$$

Les deux équations à vérifier sont :

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= (1-m) k \dot{\epsilon}_T^m \\ \beta &= m k \dot{\epsilon}_T^{(m-1)} \end{aligned} \quad (2)$$

Dans la bibliographie, les valeurs les mieux déterminées pour le cuivre CuCl sont :  $\sigma_0$ ,  $\beta$  et  $m$ . Les deux paramètres rhéologiques de la loi linéaire avec seuil,  $\sigma_0$  et  $\beta$ , sont des fonctions de la déformation du fait de l'écrouissage. En revanche, le coefficient de sensibilité à la vitesse  $m$  de la loi pseudoplastique est indépendant de la déformation. Le coefficient  $k$  est déterminé avec une plus grande incertitude. Afin de vérifier les deux équations (2), les valeurs de  $\sigma_0$ ,  $\beta$  et  $m$  sont prises chez GIANNOTTA ([1986]) ce qui permet de déterminer  $k$  et  $\dot{\epsilon}_T$ . Nous vérifions a posteriori que les valeurs obtenues pour  $k$  sont cohérentes. Les résultats sont présentés sur le tableau ci-dessous :



**+** Vitesse de déformation de transition quasistatique - dynamique

**Figure 1 :** (a) Vérification de la valeur du coefficient d'écrouissage (Cuivre CuCl)  
 (b) Vitesse de transition entre les domaines quasistatique et dynamique pour le cuivre CuCl

	$\bar{\epsilon}_{vm} = 0,05$	$\bar{\epsilon}_{vm} = 0,1$	$\bar{\epsilon}_{vm} = 0,15$	$\bar{\epsilon}_{vm} = 0,2$
m	0,014	0,014	0,014	0,014
$\sigma_0$ (MPa)	150	190	239	300
$\beta$ (MPa.s)	0,034	0,016	0,012	0,012
k (MPa.s <sup>m</sup> )	143	179	224	280
$\dot{\epsilon}_T$ (s <sup>-1</sup> )	62	168	283	355

Les valeurs obtenues pour k sont cohérentes avec celles proposées par GIANNOTTA. Si de plus, on calcule le coefficient d'écrouissage n correspondant :

$$k = k_0 \bar{\epsilon}^n \quad (3)$$

on obtient  $n = 0,47$  (Figure 1a), valeur en accord avec celles proposées par l'auteur.

Les deux lois de comportement sont portées sur la figure 1b pour les valeurs obtenues en fonction de la déformation. Il apparaît que la vitesse de transition entre les domaines quasistatique et dynamique augmente avec la déformation. Ceci s'explique simplement à l'aide de la relation liant la vitesse de déformation à la vitesse des dislocations mobiles :

$$\dot{\epsilon} = \alpha \rho_m b v \quad (4)$$

où  $\rho_m$  densité de dislocations mobiles (m<sup>-2</sup>)

v vitesse des dislocations mobiles

b norme du vecteur de Burgers

$\alpha$  facteur de proportionnalité

En première approximation, il est fréquent de supposer que la densité de dislocations mobiles  $\rho_m$  est proportionnelle à la densité de dislocations totales.  $\rho_m$  est alors une fonction croissante de la déformation. Lorsque  $\dot{\epsilon}$  est imposé, la vitesse des dislocations mobiles diminue donc [d'après la relation (4)] lorsque la déformation augmente. Ceci entraîne une diminution des



frottements visqueux, à l'origine de la présence du comportement linéaire avec seuil (MASON [1960]).

Lorsque la déformation augmente, les frottements visqueux apparaissent donc à une plus grande vitesse de déformation afin de compenser l'augmentation de  $\rho_m$ . Ce raisonnement simple explique ainsi le fait que la vitesse de déformation de transition  $\dot{\epsilon}_T$  augmente avec la déformation.





## ANNEXE IV

## Le comportement axisymétrique

Par définition, le comportement axisymétrique d'axe  $\bar{e}_z$  est invariant par rotation autour de cet axe. Les rotations  $\mathbf{R}_\theta$  compatibles avec l'axisymétrie s'écrivent alors :

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

La décomposition correspondante de tout tenseur symétrique d'ordre 2 en composantes élémentaires (dites irréductibles) est :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{u}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{33} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

La transformation par rotation de ce tenseur  $\mathbf{u}$  montre bien que ces grandeurs sont indépendantes :

$$\mathbf{R}_\theta \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{R}_\theta^T = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & \bar{u} \\ \bar{u}^T & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1^T & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \cdot u_1 \cdot \mathbf{R}_1^T & \mathbf{R}_1 \cdot \bar{u} \\ (\mathbf{R}_1 \cdot \bar{u})^T & u_{33} \end{pmatrix}$$

De plus, la matrice  $u_1$  se décompose en deux parties : sa trace  $\text{tr}(u_1)$  et son déviateur  $u_1^d$ . Le tenseur  $\mathbf{u}$  se décompose alors finalement en :

- deux scalaires  $\text{tr}(u_1)$  et  $u_{33}$
- un vecteur  $\bar{u}$  à deux composantes
- un déviateur  $u_1^d$  à deux composantes

où la somme des deux scalaires associés à cette décomposition restitue la trace du tenseur  $\mathbf{u}$ .

Le déviateur  $u_1^d$  est de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$  et se transforme par rotation du repère d'angle  $\theta$  en :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos^2\theta - 2b \sin\theta \cos\theta - a \sin^2\theta & \dots \\ b \cos^2\theta + 2a \sin\theta \cos\theta - b \sin^2\theta & \dots \end{pmatrix}$$

On passe donc du pseudovecteur  $\bar{u}'_d = \begin{pmatrix} a' = a \cos 2\theta - b \sin 2\theta \\ b' = a \sin 2\theta + b \cos 2\theta \end{pmatrix}$  au pseudovecteur  $\bar{u}_d = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  par rotation d'angle  $2\theta$ . Les vecteurs  $\bar{u}$  et le pseudovecteur  $\bar{u}_d$  ne sont donc pas de même nature tensorielle.

Les produits scalaires entre deux tenseurs d'ordre 2 relativement aux rotations d'axe  $\bar{e}_z$  peuvent se décomposer en produits scalaires entre les composantes irréductibles correspondantes des tenseurs. Ainsi :

$$\begin{aligned} \left( \begin{pmatrix} u_1 \\ \bar{u}^T \end{pmatrix} \right) \left( \begin{pmatrix} \bar{u} \end{pmatrix} \right) &= \text{tracé du produit} \\ \left( \begin{pmatrix} v_1 \\ \bar{v}^T \end{pmatrix} \right) \left( \begin{pmatrix} \bar{v} \end{pmatrix} \right) &= u_1 : v_1 + 2 \bar{u} \cdot \bar{v}^T + u_{33} v_{33} \\ \left( \begin{pmatrix} \bar{u}^T \end{pmatrix} (u_{33}) \right) \left( \begin{pmatrix} \bar{v}^T \end{pmatrix} (v_{33}) \right) &= u_1^d : v_1^d + 2 \bar{u} \cdot \bar{v}^T + \frac{1}{2} \text{tr}(u_1) \text{tr}(v_1) + u_{33} v_{33} \end{aligned}$$

D'autre part, tout opérateur linéaire, invariant par les rotations d'axe  $\bar{e}_z$  (i.e. : respectant l'axisymétrie) se décompose en opérateurs linéaires couplant simplement les composantes irréductibles de même nature tensorielle. Dans ces conditions, la relation  $\mathbf{u} = \mathbf{A} : \mathbf{v}$  relie séparément :

\* Les couples de scalaires (ordre 0) :

$$\bar{u}_s = \begin{pmatrix} \frac{u_{11} + u_{22}}{\sqrt{2}} \\ u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{v_{11} + v_{22}}{\sqrt{2}} \\ v_{33} \end{pmatrix} = (A_0) \bar{v}_s$$

\* Les vecteurs (ordre 1) :  $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \end{pmatrix} = a_5 \begin{pmatrix} v_{13} \\ v_{23} \end{pmatrix} = a_5 \bar{v}$

\* Les pseudovecteurs associés aux déviateurs (ordre 2) :

$$\bar{u}_d = \begin{pmatrix} u_{12} \\ \frac{u_{11} - u_{22}}{2} \end{pmatrix} = a_6 \begin{pmatrix} v_{12} \\ \frac{v_{11} - v_{22}}{2} \end{pmatrix} = a_6 \bar{v}_d$$

Il est alors possible d'écrire formellement  $\mathbf{u} = \mathbf{A} : \mathbf{v}$  avec  $\mathbf{A} = (A_0, a_5, a_6)$ . L'opérateur linéaire  $\mathbf{A}$  est caractérisé par 6 coefficients. En élasticité linéaire (ou viscoplasticité linéaire), le comportement s'écrit en suivant ce formalisme :  $\sigma = \mathbf{L} : \epsilon$  avec  $\mathbf{L} = (L_0, l_5, l_6)$ . L'opérateur  $\mathbf{L}$  a une propriété supplémentaire : la symétrie diagonale ( $L_{ijkl} = L_{klij}$ ). Ceci se traduit dans nos notations par le fait que  $L_0$  est symétrique. Tout tenseur d'élasticité respectant l'axisymétrie est

donc caractérisé par au moins cinq coefficients. En reprenant les notations de HILL [1964], on obtient :

$$\mathbf{L} = \left( \begin{pmatrix} 2k & \sqrt{2}l \\ \sqrt{2}l & n \end{pmatrix}, 2p, 2m \right)$$

Si le tenseur  $\mathbf{L}$  est défini positif alors  $A_0$  est aussi définie positive et de plus  $a_5 > 0$ ,  $a_6 > 0$ .

Les opérations sur les tenseurs ainsi décomposés s'effectuent alors sur les composantes irréductibles de même ordre correspondantes :

*Calcul de l'inverse :*

$$\mathbf{A}^{-1} = (A_0^{-1}, a_5^{-1}, a_6^{-1})$$

*Produit de deux tenseurs :*

si  $\mathbf{A} = (A_0, a_5, a_6)$

et  $\mathbf{B} = (B_0, b_5, b_6)$

alors  $\mathbf{AB} = (A_0 B_0, a_5 b_5, a_6 b_6)$



## ANNEXE V

## Tenseur d'Eshelby pour une matrice axisymétrique

Ce tenseur est calculé à l'aide des résultats proposés par MURA [1987].

Définissons tout d'abord les quatre intégrales suivantes :

$$I_1 = \frac{1}{\lambda^6} \int_0^1 \frac{x^6}{\Delta} dx ; I_2 = \frac{1}{\lambda^4} \int_0^1 \frac{(1-x^2)x^4}{\Delta} dx ; I_3 = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^2 x^2}{\Delta} dx ; I_4 = \int_0^1 \frac{(1-x^2)^3}{\Delta} dx$$

avec :

$$\Delta = \left[ m(1-x^2) + \frac{p}{\lambda^2} x^2 \right] \left\{ \left[ (m+k)(1-x^2) + \frac{p}{\lambda^2} x^2 \right] \left[ p(1-x^2) + \frac{n}{\lambda^2} x^2 \right] - \frac{(l+p)^2}{\lambda^2} x^2 (1-x^2) \right\}$$

Ces quatre intégrales sont de plus reliées par l'équation :

$$1 = p^2 n I_1 + p[n(k+2m) + p^2 - (l+p)^2] I_2 + [-ml(l+2p) + (k+m)(mn+p^2)] I_3 + pm(k+m) I_4$$

Le tenseur d'Eshelby s'écrit alors :

$$S_{1111} = \frac{p}{2} [n(k+m) - l(l+p)] I_2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} m(nk - l^2) + m(mn - 2lp) + p^2(k+m/2) \right] I_3 + \frac{pm}{2} \left( \frac{3}{2} k + m \right) I_4$$

$$S_{3333} = p^2 n I_1 + p[n(k+2m) - l(l+p)] I_2 + m[n(k+m) - l(l+p)] I_3$$

$$S_{1122} = \frac{1}{2} [np(k+m) - lp(l+p)] I_2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} mn(k-2m) - \frac{m}{2} (l^2 + p^2) + p^2 k \right] I_3 + \frac{pm}{2} \left( \frac{1}{2} k - m \right) I_4$$

$$S_{1133} = -\frac{1}{2} p^2 n I_2 + \frac{p}{2} (pl - mn) I_3 + \frac{pml}{2} I_4$$

$$S_{3311} = p^2 l I_1 + p(2ml - pk) I_2 + m(ml - pk) I_3$$

$$S_{2323} = \frac{1}{2} p^2 n I_1 + \frac{p}{2} [-l(l/2 + 2p) - n(m+k/2)] I_2 + \frac{p}{2} [m(p-l) + pk] I_3 + \frac{pm}{4} (k+m) I_4$$

avec les égalités suivantes :

$$S_{1212} = S_{1221} = S_{2112} = S_{2121} = (S_{1111} - S_{1122}) / 2$$

$$S_{2323} = S_{1313} = S_{3232} = S_{3131} = S_{2332} = S_{3223} = S_{1331} = S_{3113}$$

$$S_{1122} = S_{2211} ; S_{1111} = S_{2222}$$





## ANNEXE VI

## Liste des notations utilisées

- $a$  : demi-axe de l'ellipsoïde de révolution (suivant  $\bar{e}_z$ )  
 $a_i$  : combinaison des amplitudes des modes de perturbation [ $a_i = (2\alpha_i^S - \alpha_i^T)/3$ ]  
 $b$  : demi-axe de l'ellipsoïde de révolution (suivant  $\bar{e}_x$ )  
 $b_i$  : combinaison des amplitudes des modes de perturbation [ $b_i = \alpha_i^S + \alpha_i^T$ ]  
 $e$  : excentricité de l'ellipsoïde de révolution [ $e = (a-b)/(a+b)$ ]  
 $\mathbf{e}$  : tenseur des déformations élastiques  
 $\dot{\mathbf{e}}$  : déviateur du tenseur des vitesses de déformation  
 $\dot{\mathbf{E}}$  : tenseur des vitesses de déformation macroscopique  
 $e_a$  : excentricité asymptotique  
 $E_3$  : module de Young axial (comportement axisymétrique)  
 $E_t$  : module de Young le plus proche  
 $\dot{\bar{E}}_{eq}$  : vitesse de déformation équivalente macroscopique du comportement compressible  
 $\dot{\bar{E}}_{vm}$  : vitesse de déformation équivalente de von Mises macroscopique  
 $f$  : fraction volumique de cavités  
 $F(\bar{\mathbf{u}})$  : fonctionnelle à minimiser pour calculer la localisation (comportement non linéaire)  
 $\bar{g}^i$  : modes de vitesse de perturbation (comportement linéaire)  
 $G$  : viscosité du comportement linéaire  
 $I_i$  : intégrales nécessaires au calcul du tenseur d'Eshelby (annexe V)  
 $k$  : viscosité (comportement isotrope)  
 $k$  : paramètre rhéologique du comportement axisymétrique  
 $\mathbf{L}$  : tenseur de rigidité ou viscosité  
 $l$  : paramètre rhéologique du comportement axisymétrique  
 $m$  : coefficient de sensibilité à la vitesse  
 $m$  : paramètre rhéologique du comportement axisymétrique  
 $n$  : paramètre rhéologique du comportement axisymétrique  
 $n$  : coefficient d'écrouissage  
 $\mathbf{P}$  : tenseur de polarisation  
 $p$  : paramètre rhéologique du comportement axisymétrique  
 $P_i$  : polynômes de Legendre (annexe II)  
 $Q_i$  : fonctions de Legendre associées (annexe II)  
 $(r, \theta, \varphi)$  : coordonnées ellipsoïdales  
 $R$  : rayon moyen de la cavité [ $R = (a+b)/2$ ]  
 $(s, t, \varphi)$  : coordonnées ellipsoïdales  
 $s$  : variable scalaire caractérisant l'endommagement dans l'approche de PÖNTE CASTAÑEDA [1991]  
 $\mathbf{s}$  : tenseur déviateur des contraintes  
 $S$  : contrainte axiale imposée à l'infini  
 $\mathbf{S}$  : tenseur d'Eshelby  
 $\text{sgn}$  : signe de  
 $T$  : contrainte radiale imposée à l'infini

---

$\dot{\vec{u}}^\infty$	: champ de vitesse à l'infini
$\dot{\vec{u}}$	: champ de vitesse de perturbation dû à la cavité
$\dot{\vec{u}}$	: champ de vitesse total ( $\dot{\vec{u}} = \dot{\vec{u}}^\infty + \dot{\vec{u}}$ )
$V$	: volume de la cavité
$V_c$	: volume de la cavité
$\dot{W}$	: puissance plastique par unité de volume
$(x, y, z)$	: coordonnées cartésiennes
$y$	: paramètre rhéologique associé à la contrainte moyenne [ $y^2 = (2(1+\nu)/(9(1-2\nu)))$ ] (comportement linéaire isotrope compressible)
$y_i$	: paramètres d'optimisation (localisation non linéaire)
$\alpha$	: rapport des modules de Young (comportement axisymétrique)
$\alpha_i$	: amplitudes des modes perturbation
$\beta$	: viscosité du comportement linéaire avec seuil
$\beta$	: rapport des modules de cisaillement (comportement axisymétrique)
$\varepsilon^*$	: tenseur des déformations propres (Eshelby)
$\dot{\varepsilon}^\infty$	: tenseur des vitesses de perturbation à l'infini
$\dot{\varepsilon}$	: tenseur des vitesses de déformation de perturbation dû à la cavité
$\dot{\varepsilon}$	: tenseur des vitesses de déformation
$\dot{\varepsilon}_{\text{eq}}$	: vitesse de déformation équivalente du comportement compressible
$\dot{\varepsilon}_{kk}$	: trace de $\dot{\varepsilon}$
$\dot{\varepsilon}_{vm}$	: vitesses de déformation équivalente de von Mises
$\dot{\varepsilon}_T$	: vitesse de déformation de transition entre les domaines quasistatique et dynamique
$\kappa$	: module de compressibilité visqueux (comportement linéaire)
$\lambda$	: facteur de forme de l'ellipsoïde de révolution ( $a/b$ )
$\nu$	: coefficient de Poisson visqueux (comportement linéaire isotrope)
$\nu_{12}$	: coefficient de Poisson visqueux dans le plan d'isotropie (comportement axisymétrique)
$\nu_{13}$	: coefficient de Poisson visqueux perpendiculairement au plan d'isotropie (comportement axisymétrique)
$\nu_t$	: coefficient de Poisson visqueux le plus proche
$\eta_{st}^i$	: vitesses de déformation associées aux modes de perturbations $\bar{g}^i$
$\sigma$	: tenseur des contraintes
$\sigma^\infty$	: tenseur des contraintes à l'infini
$\tilde{\sigma}$	: tenseur des contraintes de perturbation dû à la cavité
$\bar{\sigma}_{\text{eq}}$	: contrainte équivalente du comportement compressible
$\bar{\Sigma}_{\text{eq}}$	: contrainte équivalente macroscopique du comportement compressible
$\sigma_m$	: contrainte moyenne
$\sigma_0$	: contrainte de seuil du comportement linéaire avec seuil
$\bar{\sigma}_{vm}$	: contrainte équivalente de von Mises
$\bar{\Sigma}_{vm}$	: contrainte équivalente de von Mises macroscopique
$\varphi(\dot{\varepsilon})$	: potentiel des vitesses de déformation
$\Phi(\dot{\varepsilon})$	: potentiel macroscopique des vitesses de déformation

---

$\psi(\sigma)$  : potentiel des contraintes  
 $\Psi(\Sigma)$  : potentiel macroscopique des contraintes  
 $\tau$  : déformation caractéristique de la vitesse de la cavité à tendre vers  $e_a$   
 $\tau$  : tenseur des contraintes de polarisation  
 $\chi$  :  $\text{sgn}(S-T)$   
 $\zeta$  : triaxialité (rapport de  $\sigma_m$  et de  $\bar{\sigma}_{vm}$ )  
 $\zeta_c$  : triaxialité critique

$\langle g \rangle$  : moyenne spatiale  
 $\text{tr}(\mathbf{a})$  : trace du tenseur du second ordre  $\mathbf{a}$  ( $\text{tr}(\mathbf{a}) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ )  
 $\|\sigma\|_{L^{-1}}$  :  $(\sigma:L^{-1}:\sigma)^{1/2}$   
 $\|\dot{\epsilon}\|_L$  :  $(\dot{\epsilon}:L:\dot{\epsilon})^{1/2}$   
 $\otimes$  : produit diadique











**BRIOTTET Laurent**

**Titre :** *Etude théorique de l'évolution du comportement de matériaux viscoplastiques endommagés*

**Spécialité :** *Science et Génie des Matériaux*

**Mots clés :** *ductilité, endommagement, viscoplasticité, anisotropie, comportement non linéaire, grandes vitesses de déformation, homogénéisation, principes variationnels*

**Résumé :**

L'objectif de ce travail est de mieux comprendre la phase de croissance de l'endommagement lors de la déformation des matériaux ductiles. Nous avons étudiés les interactions entre endommagements global (changement de comportement effectif) et local (croissance des cavités).

Dans un premier temps, le champ de vitesse exact autour d'une cavité ellipsoïdale de révolution dans une matrice viscoplastique linéaire isotrope compressible a été calculé (la compressibilité est supposée induite par l'endommagement). Les modes de perturbation obtenus ont ensuite été utilisés afin d'appliquer un principe variationnel au problème de localisation dans une matrice viscoplastique non linéaire isotrope compressible.

Dans un deuxième temps, le comportement global d'un matériau viscoplastique linéaire endommagé par une fraction volumique donnée de cavités ellipsoïdales de révolution a été obtenu au moyen de la méthode différentielle. Le potentiel d'un matériau viscoplastique non linéaire endommagé a ensuite été déterminé à l'aide d'un principe variationnel proposé par PONTE CASTAÑEDA [1991]. L'anisotropie d'origine morphologique dans de tels composites a également été étudiée.

Finalement, l'évolution du comportement au cours du chargement d'un matériau viscoplastique linéaire endommagé a été abordée.